

技術と生産関数

岩 崎 秀 二

1. まえがき

本学創立二十周年に当り，記念論文集を発刊するので何か執筆をと思ったが，本年に入ってから手がけている吟味はマーシャルの経済学原理である。しかしこれに関する論文は十分に研究してからでないと書くわけにいかない。そこでたまたま本年に入ってから岩波書店から出版されたモダン・エコノミックス全24冊中の既刊ミクロ経済学Ⅰを読んで，最近のミクロ経済学分野の研究成果がよく吸収されていることを知り，その一部分の標題について，追尾しながら主として学生諸君の聴講の参考に資すればと思い，本稿を草することにした。本来は消費者選択の理論や生産者行動の理論などを簡素化して取り扱うことができるようになったミクロ経済学の「双対性アプローチ」を考察し，最近のミクロ経済学の発展を省みるべきかもしれないが，記念号に対する一つの投稿ということで責をふさがして貰うことにしたい。

筆者のように伝統的理論で育った古い世代に属する者にとっては，モダン・エコノミックス双書にのべられているような展開の新しさとアプローチの一般性とを勉強してみただけでもそれなりの意味があるわけである。現在の学生諸君は数学的には集合論の基礎を習得してきているので，本学の，特に3，4年次の学生諸君が以下に述べるような展開を学ぶことによってレベルアップされるならば幸いである。

2. 技術の意味及び計画期間と生産要素

利潤最大化が企業行動の原則的規範であるとしても、利潤を無限に大きくするわけにはゆかない。利潤は「売り上げ」－「費用」であるから、売り上げを増加させれば、それだけ費用も増加する。従って利潤最大化のためには、如何なる生産要素をどれだけ増加させたときに、産出量がどれだけ増加するかを考えなければならない。生産・投入に関する知識は極めて複雑である。例えば自動車を生産するためには原材料、エンジン等の部品、工場や機械設備、電動力、情報コントロールのためのコンピューター、労働力など様々の生産要素が必要である。また生産も一種類だけでなく、同じ生産要素を用いながら二種類以上の生産物を結合生産している企業や農家がある。そして多種多様な生産要素と生産物の間に関する知識もまた企業により、時代により異なっている。コンピューター生産の知識は日進月歩で進んでいるのが今日の状況である。

ある生産主体がある一定時点においてもっている多種多様な生産物と投入要素の産出量——投入量の間関係についての知識の総体を「技術」(technology) ないし「技術知識」と呼ぶことにする。すると企業は一定の技術の制約のもとで、利潤を如何に最大化するかという問題に直面することになる。言い換えれば、数学的には企業は現在の技術知識のもとでさまざまな生産要素の投入量、さまざまな生産物の産出量を如何に選ぶかという、制約条件付き最大化問題を解くことになる。この制約条件付き最大化問題を解くためには、技術をより具体的に記述しなければならないが、その前に計画期間について若干述べておきたい。

「計画期間」(planning horizon) とは企業が意志決定をしようとする期間をいう。計画期間によっては、企業が生産計画をつくる場合に、技術的に可能な産出量と投入量の組み合わせをすべて実現できるわけではない。それは計画の実行に時間がかかるからである。

また、生産を始めてから生産活動が終了するまでの期間を「生産期間」と呼ぶ。すでに生産活動が始まっているならば、既遂の生産活動は動かすことができないから、技術知識の一部しか意味をもたない。従って以下では生産期間は計画期間より短いと仮定する。

一方耐久生産財や熟練労働力などの生産要素は意志決定をしてから、それらの生産要素が生産プロセスで期待される稼働をするまでには長い期間が必要である。すなわち計画期間が「成熟期間」または「投資期間」より短い場合には、計画期間中にこれらの生産要素の投入量を増加させることはできない。これらの耐久生産財は一度投入すれば長い期間にわたって使用され、費用は sunk されている。耐久生産財は使用を継続しても追加的な費用を支払う必要もなく、投入量をふやすことが困難であると同時に中途で売却されることもまれであり、投入量は短期的には一定であると考えられる。

この問題に対しては、生産要素を「可変生産要素」と「固定生産要素」¹⁾に分けて対処するのが一般である。前者は計画期間中にその投入量を変化させることが可能な生産要素であり、後者は、計画期間中に変化させることができない生産要素である。

ある生産要素が可变的か固定的かは、計画期間の長さに依存してきまる。また計画期間の長さ自体は「短期」(short-run)と「長期」(long-run)とに分けられる。長期とはすべての生産要素の投入量を変更できるほどの長い期間であり、短期とは、それより短く、固定生産要素が少なくとも一種類は継続して存在する計画期間である。長期とは従って、企業が自己の造っている生産物の生産をすべて止めて、その産業から「退出」することが可能であるとともに、また生産を開始してその産業に「参入」することも可能な期間である。短期には、ほとんどすべての生産要素が固定的なものから、わずかの生産要素が固定的なかなり長い期間に及ぶものまで、さまざまな期間が存する。

注 1) 厳密に定義すれば，固定生産要素はサンクされた固定生産要素とサンクされない固定生産要素の二つに区別される。電話機は不可分性をもつ生産要素であるが，中古電話機市場が整備され，中古価格がある程度高ければ，電話機の費用はサンクされておらず，生産を中止するときは投入量をゼロにすることができる。以下ではサンクされた固定生産要素を意味するものとする。詳しくは Baumol 他，Contestable Markets and the Theory of Industry Structure, New York, 1982, を参照。

3. 生産可能集合とその性質

技術とは種々の生産物と生産要素の産出量及び投入量との間の関係に関する知識である。いま，ある企業が生産している生産物が全部で m 個，投入生産要素が全部で n 個あるとし，夫々 $1, 2, \dots, m; 1, 2, \dots, n$ とする。¹⁾ この企業が生産しようとする第 i 生産物の産出量を $y_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, m)$ であらわすなら，ベクトル $y=(y_1, y_2, \dots, y_m) \in R_+^m$ はこの企業の「産出ベクトル」である。(ここに R は実数の集合で $+$ は R^m の非負象限を表わす)。同様にして第 j 生産要素の投入量を $x_j \geq 0 (j=1, 2, \dots, n)$ としよう。 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_+^n$ は，この企業の「投入ベクトル」である。これら 2 つのベクトルのペア $(x, y) \in R_+^{n+m}$ は，この企業の投入——産出の組み合わせ，または「生産計画」(production plan) と呼ぶ。

企業にとっては，現在持っている知識のもとで実行可能なすべての生産計画の集合が技術である。この実行可能な集合を「生産可能集合」(production possibility set) と呼び， $Y \subset R_+^{n+m}$ で表わすことにしよう。生産可能集合のうち最も簡単なものは生産物，生産要素が何れも一種類の場合であるが，生産物が m 個，生産要素が n 個存在する場合には，生産可能集合よりも，その一部を考える方が便利なので，生産可能集合の「制限」(restriction) を定義することにする。産出ベクトル $y \in R_+^m$ が与えられたとき，それを行い得る投入ベクトル全体の集合を「必要投入量集合」(input requirement set) とよび， $R(y)$ で表わせば，

$$R(y) = \{x \in R_+^n \mid (x, y) \in Y\}$$

で定義される。一方, $x \in R_+^n$ が与えられたとき, その投入ベクトルの下で実行可能な産出ベクトル全体の集合を「可能産出量集合」といい, $P(x)$ で表わせば,

$$P(x) = \{y \in R_+^m \mid (x, y) \in Y\}$$

と定義することができる。

短期の場合, 生産要素 n 個のうち, いくつかは固定生産要素である。いま, $1, \dots, k (1 \leq k < n)$ を可変生産要素とし, $k+1, \dots, n$ を固定生産要素, $\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n$ を固定生産要素の投入量としよう。ベクトル $\bar{x}_f \equiv (\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n) \in R_+^{n-k}$ を「固定生産要素ベクトル」という。このとき $\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n$ は企業にとって変更することができないから, 産出量 y は可変生産要素の投入量を変化させることによってしか変更できない。 $x_v \equiv (x_1, \dots, x_k) \in R_+^k$ を「可変生産要素ベクトル」という。従って企業にとって意味があるのは y と x_v の間の関係である。 \bar{x}_f を所与として, 実行可能な生産ベクトルと可変生産要素ベクトルのペア全体の集合は「短期生産可能集合」(short-run production possibility set) である。すなわち短期生産可能集合は,

$$Y(\bar{x}_f) = \{(x_v, y) \in R_+^{k+m} \mid (x_v, \bar{x}_f, y) \in Y\}$$

で定義される。

生産可能集合には, 通常 of 技術が満たしていると思われるいくつかの性質があるが, 次に特に重要な性質を挙げておこう。(A₁) から (A₃) までは常に仮定しうる標準的なものであり, (A₄) 及び (A₅) とそれらとしばしば代替的に使われる (A₆) または (A'₆) は仮定される文脈が重要であり, 常に成立するとは限らない。

$$(A_1) \quad [y > 0 \text{ かつ } (x, y) \in Y] \Rightarrow x >^2 0$$

A_1 は「桃源境の不可能性」(impossibility of the Land of Cockaigne's) または「フリー・ランチの不可能性」(impossibility of free lunch) といわれるものであり、生産物の生産には必ず何らかの生産要素の投入が必要であり、無から有を作り出すことはできないという性質である。投入量がゼロなら産出量はゼロである。

(A_2) 生産可能集合 Y は閉集合である。

いま無限個の実行可能な生産計画 $(x_s, y_s) \in Y (s=1, 2, \dots)$ がある生産計画 (x^*, y^*) に収束したとき、収束した先の生産計画も実行可能である。つまり $(x^*, y^*) \in Y$ が成立するということが閉性の意味である。³⁾ 言い換えれば、生産可能集合はその境界を含むということである。この性質が満たされないと生産関数が定義できず、また費用最小化や利潤最大化問題の最適解が存しないという病理的現象が生ずることになる。

(A_3) $[(x, y) \in Y \text{ かつ } x' \geq x \text{ かつ } y' \leq y] \Rightarrow (x', y') \in Y$

この仮定はもしある生産計画 (x, y) が実行可能であるならば産出量を減らし、投入量をふやした生産計画もまた実行可能であることを意味する。これは生産要素や生産物を資源を使わずに自由に廃棄できるという性質であり、「無償廃棄の可能性」(free disposability) といわれるものである。この可能性が満たされるならば任意の実行可能な生産計画の右下方の部分は必ず生産可能集合に含まれることになる。

(A_4) $[(x, y) \in Y \text{ かつ } 0 < \lambda < 1] \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in Y$

(A_5) $[(x, y) \in Y \text{ かつ } (x', y') \in Y] \Rightarrow (x+x', y+y') \in Y$

この二つの仮定は常に満たされるとは限らないが、技術の性質を記述するのに重要な役割を果たすものである。 (A_4) は「可分性」(divisibility) といわれ (A_5) は「加法性」(additivity) と呼ばれる。この二つの性質は、長期の

すべての生産要素が可変的である場合にのみ成立する性質である。可分性とは、ある生産工程を使って y の生産が可能ならば、同じ生産工程を使い、各生産要素投入量を同じ割合だけ小さくしたもので置き換えることによって、その何分の1でも生産の実行が可能であるという性質である。また、加法性とは、一つの工場で (x, y) の生産工程を、別の工場で (x', y') の生産工程を行なえば、企業全体としては $(x+x', y+y')$ の生産計画を実行することができるという性質である。

可分性と加法性ことから、生産可能集合は次の2つの極めて特徴的な性質をもつことになる。

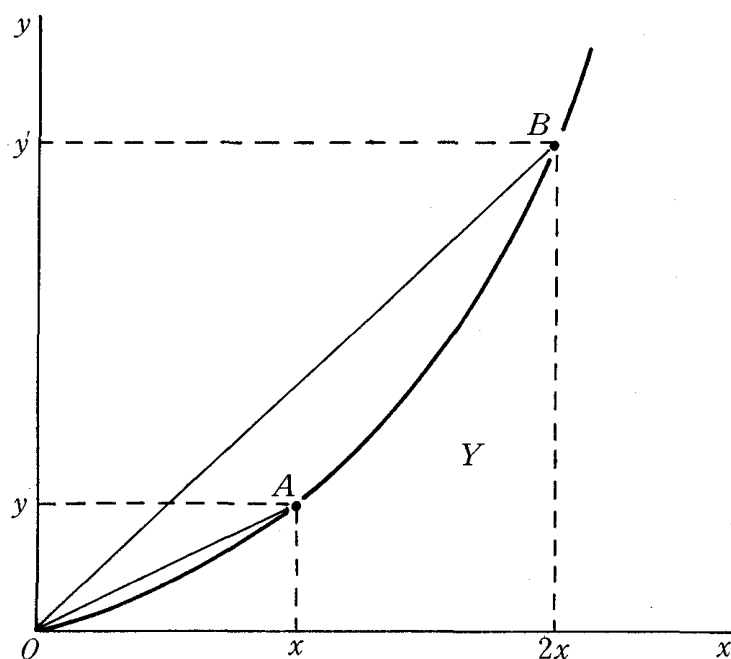
- (i) 生産可能集合 Y は凸になり、かつ
- (ii) 技術が「規模に関する収穫不変」という性質をもつ。

生産可能集合が凸錐ならば凸集合であるから(i)が成立し、また凸⁴⁾錐であれば技術が規模に関する収穫不変という性質をもつことは明らかである。従って可分性と加法性が満たされれば、生産可能集合が凸錐になることを説明すればよいわけである。そのためには凸錐の定義から、任意の正数 s, t , および任意の実行可能な生産計画 $(x, y), (x', y')$ について $(sx+tx', sy+ty')$ が実行可能であることを示せばよい。 M を s, t より大きな任意の整数としよう。加法性により $(x, y), (x', y')$ を M 回加え合せた生産計画 $(Mx, My), (Mx', My')$ も実行可能である。一方 $q=s/M, r=t/M$ ($0 < q, r < 1$)とすれば、可分性により、 $(qx, qMy)=(sx, sy), (rMx', rMy')=(tx', ty')$ も実行可能である。また加法性により、これら2つの生産計画の和も実行可能である。よって求める結論が得られる。

長期の生産可能集合が凸性を満たしていれば（仮定 (A_4) と (A_5) が同時に満たされているか、あるいは後述の仮定 (A_6) が満たされれば）必要投入集合、可能産出量集合、短期生産可能⁵⁾集合はすべて凸となる。（必要投入量集合がなぜ凸になるかについては注6)を参照せよ）。

可分性と加法性およびそれらによって導かれる規模に関する収穫不変という性質は、長期の生産可能集合においてしばしば仮定される。この仮定が当てはまる技術は最も標準的なものであり、技術やそれに関するさま

ざまな概念を説明する上できわめて有効だからである。しかし現実の経済では可分性が常に成立するとは限らない。なぜなら技術はしばしば「不可分性」であり、また生産要素も不可分性をもっているからである。(例えばトラックは1/2台、1/3台というような単位で投入することはできないし、2人が分担して同時に作業を行うことによる分業の利益のある場合にも可分性は成立しない)。



第1図 不可分性と生産可能集合の非凸性

技術の不可分性が存在しているときには、生産可能集合の凸性は成立しない。第1図は不可分性が存在する場合の生産可能集合の例である。要素投入量が x の場合の最大産出量を y とすれば、要素投入を $2x$ としたときの産出量 y' は $2y$ を超える。分業の利益が存するわけである。このとき

生産可能集合は第1図の OAB の右側で示されるように非凸になる。

このように規模に関する収穫不変という性質は一見もっともらしくみえるが常に満たされるとは考えられない。それで、しばしば (A_4) 、 (A_5) の代わりにより弱い仮定が用いられる。すなわち

(A_6) 生産可能集合 Y は凸集合である。

仮定 (A_6) は Y が強い意味で凸である可能性を含むから、明らかに仮定 (A_4) と (A_5) を合わせたものより弱い仮定である。しかし (A_6) よりも一層弱

い次の仮定が前提されることもある。

(A'₆) 任意の $\bar{y} \in R^m_+$ について必要投入集合 $R(\bar{y})$ は凸集合である。

仮定(A'₆)は、生産可能集合自体が凸集合であることを要求していない故に、(A₆)より弱い仮定であることは明らかである。しかし(A'₆)が成立すれば、費用関数が生産要素価格に関して連続となる。

注 1) 中間生産物は企業にとって、外部から購入することもできるし、生産した中間生産物を他企業に売却することも可能である。前者の場合、中間生産物はこの企業にとって生産要素であるし、後者の場合には生産物である。従って、厳密には生産要素と生産物の区別は内生的に決まるのであり、外生的にこの区別が与えられると考えることには無理がある。しかし説明の便宜上外生的に与えられているものとして考える。なお中間生産物の問題を解決する方法は、生産物と生産要素の区別を行わず、各財の純産出量によって技術を定義することである。

2) ベクトルの不等号の意味は $x > y \Leftrightarrow x \geq y$ かつ $x \neq y$ である。

3) R^n 内の集合 A は、 $R^n \setminus A$ が開集合であるとき、あるいは A の境界点が全部 A に属するとき「閉集合」(closed set) である。

4) R^n の任意の点 x に対して $\{\alpha x \mid \alpha \in R, \alpha \geq 0\}$ によって定義される集合を x によって定まる「射線」(ray) という。 R^n の部分集合 A は任意の点 $x \in A$ によって定まる射線が必ず A に含まれるとき「錐」(cone) である。また R^n の任意の2点 x, x' を端点とする線分 $[x, x']$ が必ず A にふくまれるとき、すなわち $x, x' \in A \Rightarrow [x, x'] \subset A$ が成立するとき凸集合であるという。

5) 一般に、長期の生産可能集合が凸錐であっても、短期生産可能集合は凸錐にならないことに注意すべきである。

6) 産出量 \bar{y} を所与として、2つの投入ベクトル x と x' がともに必要投入集合 $R(\bar{y})$ の要素であるとしよう。定義により、2つの生産計画 (x, \bar{y}) と (x', \bar{y}) はともに生産可能集合 Y の要素でもある。生産可能集合の凸性から任意の0と1の間の正数 λ について、生産計画 $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda \bar{y} + (1-\lambda)\bar{y}) = (\lambda x + (1-\lambda)x', \bar{y})$ も生産可能集合の要素であることが明らかである。従って、2つの投入ベクトル x と x' の任意の凸結合も、必要投入量集合の要素であることが明らかとなり、必要投入量集合の凸性が証明される。なお生産可能集合が凸でなくとも(A'₆)が仮定されるならば、定義により必要投入要素集合は必ず凸になる。

4. 効率生産集合と生産関数

ある生産計画 $(x, y) \in R^{n+m}$ が別の生産計画 $(x', y') \in R^{n+m}$ に比べて、どの生産物の産出量も少なくはなく、どの生産要素の投入量も多い訳でもないのに、ある生産物の産出量が多いか、あるいは生産要素の投入量が少ないという意味で無駄が少ない場合に、すなわち、

$x \leq x'$ かつ $y \geq y'$ であり、しかも $x < x'$ または $y > y'$ であるなら (x, y) は (x', y') に優越する¹⁾という。利潤の最大化をはかる企業は他のどんな実行可能な生産計画にも優越されない生産計画を選ぼうとする。実行可能な生産計画のうち、他のどんな実行可能な生産計画によっても優越されない生産計画を「効率的」(efficient)な生産計画といい、効率的な生産計画全体の集合 Y^* を「効率生産集合」(efficient production set)と呼ぶ。定義により

$$Y^* = \{(x, y) \in Y \mid (x', y') \text{ が } (x, y) \text{ に優越するなら } (x', y') \notin Y\}$$

である。²⁾一般に効率生産集合は生産可能集合の境界として定義されよう。そして、もし生産可能集合が閉でなければ、その境界は生産可能集合に含まれず、従って効率生産集合は望ましい形で定義できない。³⁾

一般に、効率生産集合は投入ベクトル x と産出ベクトル y の生産関数によって表わすことができる。生産関数 $\Gamma(x, y)$ とは、

$$\Gamma(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in Y^*$$

を満たす関数である。

生産関数の概念は一般的な生産物の数が m 個、生産要素の数が n 個の場合について定義できる。生産物が複数個の場合は結合生産が行なわれ、取扱が複雑となるので、ここでは生産物が1種類の場合について述べるなら、産出量はスカラー(y)で、投入量はベクトル (x_1, \dots, x_n) で表わされる。

このとき生産関数は x の投入ベクトルの下での最大産出量

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x)$$

で表わされる。

また、 $\bar{x}_f = (\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n)$ を固定生産要素ベクトル、 $x_v = (x_1, \dots, x_k)$ を企業が選ぶ可変生産要素ベクトルとすれば、企業にとって意味ある情報は x_v と y との間の関係に関する情報であり、

$$g(x_v) = f(x_v; \bar{x}_f)$$

で定義される「短期生産関数」 $g(x_v)$ に含まれる。そして短期生産関数は短期生産可能集合のうち、効率的な計画の集合を関数形式で表現したものにはかならない。

さきに生産可能集合について仮定した性質を生産関数の概念を使って述べれば次のようになる。

$$(A_1) \text{は} \quad (B_1) \quad f(0) = 0$$

$$(A_3) \text{は} \quad (B_3) \quad f(x) \text{はすべての } x_i \text{ について単調減少関数}$$

と同値である。 (A_4) と (A_5) の両方を仮定するなら、つまり生産可能集合が凸錐であるなら

$$(B_4) \quad f(x) \text{は1次同次の凹関数である。}^{4)}$$

また

$$(A_6) \text{は} \quad (B_6) \quad f(x) \text{は凹関数である。}$$

および

$$(A'_6) \text{は} \quad (B'_6) \quad f(x) \text{は擬凹関数である。}^{5)}$$

と同値である。これらの性質は定義から容易に確かめうるものである。

注 1) 2つの生産計画をとったとき、常に一方が他方に優越するとは限らない。

優越という概念はすべての生産計画を順序づけるものではない。優越は完備性をもたず順序 (order) ではない。ここに完備性とは任意の $x, x' \in X$ に対して xRx' と $x'R x$ のうち少なくとも一方が成立することをいう。

- 2) ここで定義した効率性は通常強い意味での効率性と呼ばれる概念である。最近では弱い意味での効率性がよく使われる。ある生産計画 (x, y) が別の生産計画 (x', y') と比べて、すべての生産量が多いにもかかわらず、すべての投入量が少ないという意味で無駄が少ない場合 (x, y) は (x', y') に優越するといひ、弱い意味で効率的であるというのである。
- 3) 無償廃棄の可能性を意味する仮定 (A_3) によって、生産可能集合の境界線が右下がりになることはありえない。この結果、境界線上の生産計画は決して優越されず常に効率的になる。弱い意味の効率性概念を使う際には境界線が垂直部分や水平部分を含むとき、これらの部分は効率集合には含まれないことに注意すべきである。
- 4) R' 内の凸集合 X を定義域とする実数関数 $f: X \rightarrow R$ において X の相異なる任意の 2 点 x, x' と $0 < \alpha < 1$ を満足する任意の実数 α に対して

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)x') \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x')$$

が成立するとき f は凹関数であるといわれる。

- 5) R' 内の凸集合 X を定義域とする実数値関数 $f: X \rightarrow R$ は、 X の相異なる任意の 2 点 x, x' と $0 < \alpha < 1$ を満足する任意の実数 α に対して

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)x') \geq \min\{f(x), f(x')\}$$

が成立するとき擬凹関数であるといわれる。常に厳密な不等号が成立する場合には f は「強い意味の擬凹関数」であるという。

5. 総生産性・平均生産性・限界生産性

総生産性、平均生産性、限界生産性概念は技術や生産関数の特性を記述するための重要な概念である。「総生産性曲線」は n 個の生産要素の投入量と産出量との間の関係を表わすグラフであり、従って生産可能集合の境界である生産関数を当該要素以外のすべての生産要素の投入量を一定とした平面で切った断面のグラフとなる。

また、一般に $\bar{x} \in R_+^n$ という投入ベクトルの下での第 i 生産要素投入量に対する偏微係数 $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{x})$ を第 i 生産要素の「限界生産性」(marginal pro-

duct または marginal productivity of i -th input 略して $MP_i(x)$ という。投入ベクトル x の下での限界生産性は総生産性曲線のある点における接線の傾きである。

なお結合生産のある場合の生産関数 $\Gamma(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$ の総生産性と限界生産性についていえば、任意の生産要素 i の任意の生産物 j に対する総生産性曲線を、他の生産性要素投入量及び産出量を一定として定義することができる。また生産関数 Γ が微分可能であれば、それを全微分する¹⁾ ことにより、

$$\sum_{h=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_h} \Gamma(x, y) \right] dx_h + \sum_{l=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial y_l} \Gamma(x, y) \right] dy_l = 0$$

が得られる。ここで、 i 以外のすべての生産要素投入量および j 以外のすべての生産物産出量が一定であると仮定すれば、

$$\left. \frac{dy_j}{dx_i} \right|_{\substack{dx_h=0, h \neq i \\ dy_l=0, l \neq j}} = - \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x, y)}{\frac{\partial}{\partial y_j} \Gamma(x, y)}$$

が得られる。これが第 i 生産要素の第 j 生産物に対する限界生産性 (marginal product of i -th input with respect to j -th output, $MP_{ij}(x, y)$) である。²⁾

一般に限界生産性は投入ベクトル (x_1, \dots, x_n) 、とりわけ当該生産要素の投入量の増加とともに逓減すると考えられる。これが「限界生産性逓減の法則」であるが、もしこの法則が成立するならば、総生産性曲線は上方に向って凸であり、生産関数の 2 階微分可能性を仮定すれば、生産関数の当該生産要素に対する 2 階の偏微分係数は非正である。すなわち、

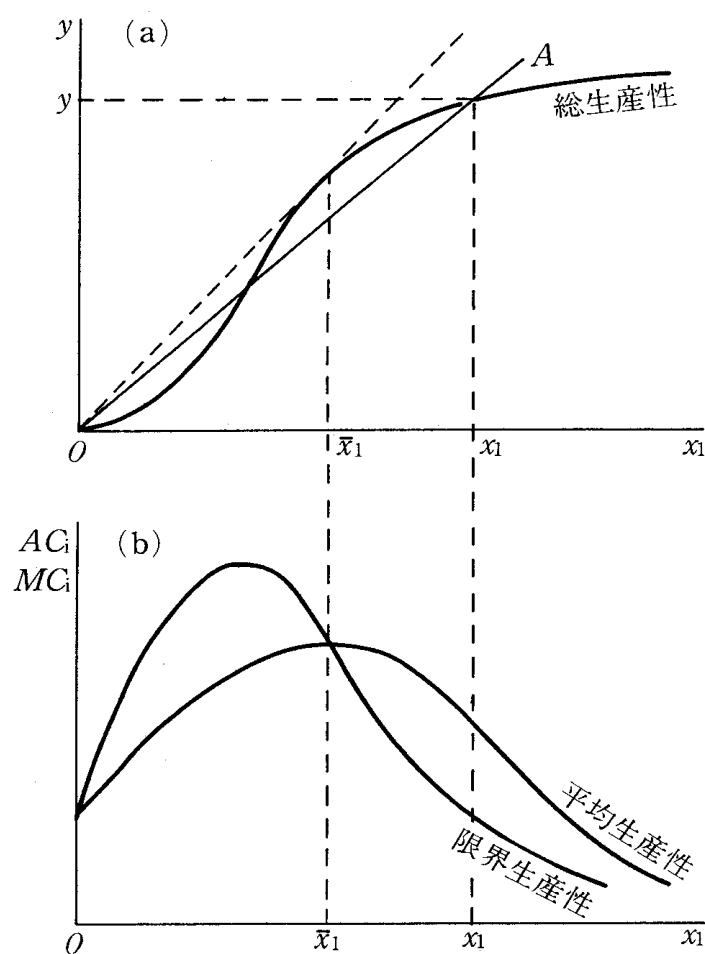
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) \leq 0$$

である。

限界生産性逓減の法則は生産可能集合が凸であり、生産関数が凹関数な

ら必ず満たされる性質である。³⁾しかし、技術に不可分性が存在する場合、特に産出量が小なる場合には限界生産力が逡増し、総生産性曲線が下方に凸になることも考えられる。不可分性は現代の技術の特徴であり、従って限界生産性が逡増し、生産を増加させるとともに、生産性が増大する「規模の経済」(economics of scale)は、現代の経済を分析する際の重要な要素であることに注意する必要がある。

「平均生産性」は生産要素 1 単位当りの産出量であり、 $f(x)/x_i$ をベクトル x における第 i 生産要素の平均生産性 (average product of i -th input, $AP_i(x)$) という。



第 2 図 総生産性、限界生産性と平均生産性

第 2 図は、平均生産性と限界生産性を、産出量の関数として描いたものである。図(a)のように、投入量が小さいときに限界生産性が逡増し、投入量が大きくなれば限界生産性逡減に転ずるという技術の性質から両曲線はともに上方にふくらんでいる。また $MP_i(x) > AP_i(x)$ なら平均生産性は増加し、 $MP_i(x) < AP_i(x)$ なら減少する。従って、限界生産性曲線は、平均生産性曲線の最大点でこれと交わるわけである。

これは数学的には次のように容易に証明できる。平均生産性 $f(x)/x_i$ を投入量 x_i で微分すれば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{f(x)}{x_i} \right] &= \frac{1}{x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) - \frac{f(x)}{x_i} \right] \\ &= \frac{1}{x_i} [MP_i(x) - AP_i(x)]\end{aligned}$$

となる。

注 1) f は R^s の開集合 X 上の実数値関数とすると、点 $x^0 \in X$ において、適当な定数 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$ が存在して

$$\begin{cases} f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^s \alpha_i (x_i - x_i^0) + \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{\varepsilon}{d(x, x^0)} = 0 \end{cases}$$

が成立するとき、 f は x^0 において「全微分可能」である。 f が $x \in X$ において全微分可能であれば、任意の点 $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_s) \in R^s$ に対して

$$df(x, dx) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) dx_i$$

という表現を f の全微分とよぶ。上式は一層簡単に

$$df \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

と書くことが慣行的に行なわれている。

- 2) 限界生産性を定義することは必ずしも全微分を使わなくても容易にできる。
- 3) 総生産性の下方領域は、その生産要素以外のすべての生産要素を固定要素としたときの短期生産可能集合に等しいからこの性質がある。

6. 等量曲線と技術的限界代替率

複数の生産要素があれば、同じ生産をするときに生産要素間の代替を行うことができる。任意の産出量 y に対して、その量の生産を行なうことが可能となるすべての投入ベクトルの集合、すなわち必要投入量集合

$R(y) = \{x \in R_+^n \mid (x, y) \in Y\}$ のうち、効率的な投入ベクトルの集合

$$R^*(y) = \{x \in R(y) \mid x' < x \Rightarrow x' \notin R(y)\}$$

は「等量曲線」である。また等量曲線上のある一点 $x \in R_+^n$ における等量曲線の接線の傾きの絶対値は「技術的限界代替率」($MTS_{ij}(x)$)である。より一般的には、生産関数を全微分し、第 i 生産要素と第 j 生産要素以外の生産要素の投入量および産出量が一定であると仮定すれば、

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right] dx_i + \left[\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \right] dx_j = dy = 0$$

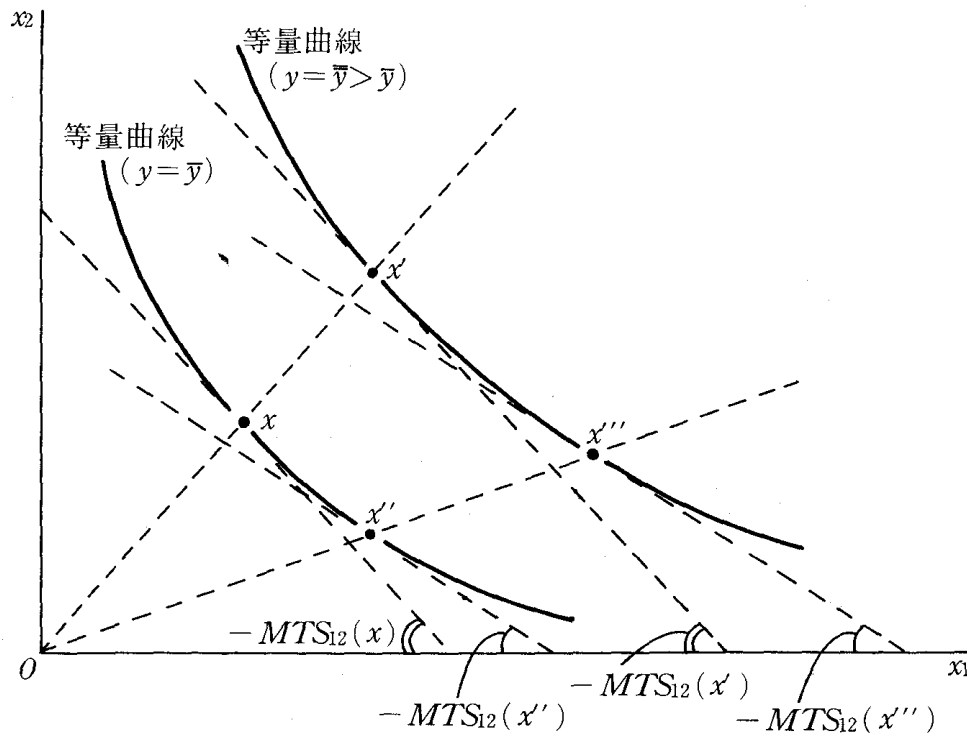
であり、

$$MTS_{ij}(x) = - \frac{dx_j}{dx_i} \bigg|_{\substack{dy=0 \\ dx_h=0; h \neq i, j}} = - \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)}{\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)}$$

となり、技術的限界代替率は、そのときの投入ベクトルの下での、2つの生産要素の限界生産性（限界生産力）の比率となる。

必要投入集合の凸性を仮定する(A')または(B')の仮定の下では等量曲線は必ず原点に向って凸になる。従って産出量を一定として、第 i 生産要素の投入量を増加し、第 j 生産要素の投入量を減少してゆけば、第 i 生産要素の第 j 生産要素に対する技術的限界代替率は次第に減少する。すなわち「技術的限界代替率逓減の原理」(principles of diminishing marginal rate of technical substitution)が成立する。技術が規模に関する収穫不変の法則を満たす場合には、技術的限界代替率は生産要素投入ベクトル x の 0 次同次関数であり、技術が規模に関する収穫不変の性格を満たす場合には等量曲線は原点に対して相似的になる。等量曲線が原点に対して相似的になる性質をもつ生産関数をホモセティック (homothetic) な生産関数という。規模に関する収穫不変の生産関数はホモセティックな生産関数の特殊ケース¹⁾である。生産要素が2つの場合のホモセティックな生産関数の例として

は、マルチ・プロセス型生産関数、コブ＝ダグラス型生産関数とレオンチェフ型生産関数がある。²⁾ コブ＝ダグラス型及びレオンチェフ型の生産関数を含むより一般的な生産関数としてはCES生産関数（constant elasticity of substitution production function）がある。³⁾ 第3図はホモセティックな生産関数の等量曲線を示したものである。



第3図 ホモセティックな生産関数の等量曲線

以上は、1生産要素1生産物及び生産要素どうしの間の関係についての諸概念であるが、結合生産を含む生産関数 $\Gamma(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$ の場合には生産物どうしの関係も重要である。簡単化のため生産物の数が2つ、生産要素投入ベクトルが \bar{x} で一定としたときに実行可能な産出量の組み合わせ、すなわち可能産出量集合 $P(\bar{x})$ 、すなわち $\{y \in R_+^2 \mid (\bar{x}, y) \in Y\}$ を考える。この生産可能集合が凸であれば $P(\bar{x})$ は凸集合として表わすことができ、その上方境界線はそのときの生産要素投入量 \bar{x} の下で最も効率的な

産出量ベクトルを表わしている。これは「変形曲線」(transformation curve)といわれる。生産計画 (\bar{x}, \bar{y}) 、すなわち変形曲線上の点 \bar{y} におけるこの曲線の傾きは、 $\Gamma(\bar{x}, \bar{y})=0$ を全微分し、すべての k について $dx_k=0$ 、すべての $l \neq i, j$ について $dy_l=0$ を仮定することにより、

$$-\left. \frac{dy_j}{dy_i} \right|_{\substack{dx_k=0 \\ dy_l=0; l \neq i, j}} = \frac{\partial}{\partial y_i} \Gamma(\bar{x}, \bar{y}) / \frac{\partial}{\partial y_j} \Gamma(\bar{x}, \bar{y})$$

となり、第 i 生産物の第 j 生産物に対する「限界変形率」(marginal rate of transformation of i with respect to j 、略して $MRT_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$)を表わしていることはいうまでもない。

注 1) 一般に同次関数の単調変換によって定義される関数を「ホモセティック関数」という。 g は R^n の開集合 X 上の連続微分可能で m 次同次の実数値関数、 $f: R \rightarrow R$ は微可能な単調増加関数とするとき、

$$(A) \quad \phi(x) \equiv f(g(x))$$

は X 上の実数値ホモセティック関数である。ホモセティック関数のもつ重要な性質は、その偏導関数の比(限界代替率)が0次同次関数となり、従ってその値は変数の比にのみ依存するということである。証明は次の通り。

(A)式の両辺を $x_k(k=1, 2, \dots, s)$ で偏微分すれば

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \phi(x) = f'(g(x)) \frac{\partial}{\partial x_k} g(x) \quad (k=1, 2, \dots, s)$$

が従う。同次関数の性質により $\frac{\partial}{\partial x_k} g(x)$ は $(m-1)$ 次同次関数となるので

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x)}{\frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} g(x)}{\frac{\partial}{\partial x_j} g(x)} \quad (i, j=1, 2, \dots, s)$$

は0次同次関数となり、証明された。

- 2) 収穫一定の場合のコブ=ダグラス生産関数は $f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^{1-a}$ と表わされる。 A は任意の正の実数、 a は0と1との間の任意の定数。従って第1生産要素は限界生産性 $aA \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a-1}$ 、第2生産要素の限界生産性は $(1-a)A \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a$ 、第1生産要素の第2生産要素に対する技術的限界代替率は $\frac{a}{1-a} \frac{x_2}{x_1}$ である。より一般的には $f(x_1, x_2) = (Ax_1^a x_2^b)$ (A, a, b は任意の正の定数)と表わされる。

レオンチェフ生産関数は、 $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$ (a, b は任意の正の定

数)と表わされる。この場合等量曲線はL字型をなし、各等量曲線は直線 $x_2 = \frac{a}{b}x_1$ 上でキंकする。

- 3) CES 生産関数は $f(x_1, x_2) = A[ax_1^{-b} + (1-a)x_2^{-b}]^{-1/b}$ (A, a, b は定数で、 $A > 0, 0 < a < 1, \infty > b > -1$) で表わされる。 b がゼロに限りなく近づくときにはコブ=ダグラス生産関数に収束し、 b が無限大に近づくときにはレオンチェフ生産関数に収束する。

7. あとがき

以上、モダンエコノミックスのミクロ経済学に展開されている奥村正寛・鈴木興太郎の両氏の優れた現代的アプローチによる技術と生産関数について追尾してきたが、従来の伝統的理論の結論に特につけ加えられたものはない。しかし展開の新しさによる厳密さは特に学生諸君の参考になると思う。本学の学生諸君が本論を参考にして、そのレベルアップに資してほしいと思うし、何れ原典を使用してゼミナールをしてみたいと思う以外に他意はないので、両氏に深謝するとともに、足りない点については御寛恕を乞いたいと思う。私は市場には市場の理論が、非市場には非市場の経済理論があるべきだと考えている。この点では両氏は筆者と共通の考えを有することに共感する。

なお、参考書として次の四書を推奨しておきたい。

Baumol, W.J., Panzar, J.C. and R.D. Willig, *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure*, New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1982. (サンクされた固定生産要素とサンクされない固定生産要素との区別の詳細な説明がある)。

Shephard, R.W., *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton: Princeton University Press, 1970. (生産可能集合及び技術の取り扱いに関する古典的な詳細な説明がある)。

奥野正寛・^{まさひろ}鈴木興太郎, 「ミクロ経済学Ⅰ」(モダンエコノミックス),

1985年1月，岩波書店。(ミクロ経済学の優れた現代的アプローチで，最近の学問の成果がよく取り入れられており，大学の高学年生の参考書に好適である)。

小島照男・小沢^{けんいち}健市・小林^{やすよし}保美，「現代経済学」昭和60年7月，文化書房博文社。(現代経済学の入門書として経済問題の問題意識が新しく，大学低学年生の参考書としてよい。序章および本稿の参考になる第3章生産の理論と第4章企業行動の理論の執筆者である小林保美君は本学の卒業生である)。