

# 日本におけるマクロ経済変動の 「ネットワーク仮説」の検証

八 木 直 人

## 1. はじめに

本論文では、Acemoglu et al. (2012) において提起されたマクロ経済変動の「ネットワーク仮説」について理論的整理を行うとともに、仮説が日本の産業連関構造においても成り立つか否かについて検証する。

景気変動理論の標準的なフレームワークでは長い間、多くの経済部門に共通の影響を及ぼすマクロ経済ショックのみ焦点をあて、その伝播メカニズムを説明することが主眼であった。こうした姿勢の背後には、企業や産業などミクロ・レベルに生じるショックは、マクロ・レベルの経済現象に影響を与えないという前提がある。ミクロ・ショックは互いに独立に生起するものであるから、部門の細分化の度合いを高めショックを細かく分割していけば、集計レベルでは互いに相殺されて消滅してしまうものだと考えられたからである。大数の法則を理論的背景とするこうした考え方は、Lucas (1977) に代表される多様化論 (diversification argument) として知られている。

しかし企業や産業部門などの経済組織はさまざまな形でネットワークを構成しており、相互依存関係の中で影響を及ぼし合っている。こうしたネットワーク構造がショックの伝播メカニズムに特別な効果を持つとしたら、たとえミクロ・レベルのショックが互いに独立であったとしても、上述のような多様化論は成立しない可能性がある。Long and Plosser (1983) は、部門ショックが経済全体の変動を生み出す可能性を実証的に示した初

期の研究である。またJovanovic（1987）は、各プレイヤーがゲーム的に振る舞う経済において、経済全体の変動が内生的に生じ大数の法則が破れる簡単ではあるが興味深い経済モデルを提案している。Horvath（1998）は、大数の法則が破れる場合にミクロ・レベルのショックは相殺されないことを示し、マクロ経済モデルにおける標準アプローチへの批判として画期となった。Shea（2002）は、経済構造を強調するためにネットワーク理論を適用し、経済部門の活動を集約的スピルオーバーと関連づけ、実際のビジネスサイクルの共振につながることを示した。

特にGabaix（2011）は、いわゆる「粒状仮説」を提唱し、企業規模の不均質さの度合いがベキ分布に従うほど大きい場合、漸近分布の収束率が遅くなることにより大数の法則が破綻することを示し、Acemogluらの研究と並んで注目を集めている。

Acemoglu et al.（2012）は、こうした関心の延長上で、特にネットワーク構造の持つ不均質さの度合いに着目し、「ネットワーク効果（network effect）」に起因するマクロ経済変動の影響について分析したものである。経済ネットワークの構造は均質ではなくショックを伝播させるメカニズムも方向によって一様ではない。中には「桁」違いの規模を持つ巨大な企業や産業部門が存在しており、経済ネットワーク上のハブの機能を果たしている。こうしたハブの存在は、ショックの伝播に大きな「偏り」をもたらし波及効果に歪みを生じさせる。ネットワーク構造の偏りがベキ分布に従うほど「桁」違いに大きい場合、部門の細分化の度合いを高めミクロ・ショックのサイズを細かく切り刻んだとしてもショックの余波は相殺されず、経済全体への波及効果に無視できない「偏り」が残ってしまう。実際の経済ネットワークにおいて、「ハブ」となるような巨大な企業や産業部門が存在していることをみれば、こうした可能性がもっともらしいと考えるに十分である。

Acemogluらは、米国の産業連関表のデータを用いた実証分析により、

産業連関ネットワークの構造の不均質さの度合いがベキ分布にしたがう程度に大きいことを示し、実際のデータが仮説と整合的であることも示した。彼らが提起したアプローチはマクロ経済変動の「ネットワーク仮説」と呼ばれ、彼らの先駆的な研究をきっかけとして、企業や産業部門が構成する経済ネットワークの分析に注目が集まることになった。

産業連関分析では部門間に働くネットワーク効果の方向が異なることから、中間財の供給を通じてネットワークの下流へ向かう「前方関連効果 (forward linkage effect)」と中間財の需要を通じてネットワークの上流へ向かう「後方関連効果 (backward linkage effect)」に分類している。Acemogluらの研究は、このうち前方関連効果に焦点をあて、供給サイドのネットワーク効果に起因するマクロ経済変動を分析している。モデルの仮定を緩めることによって異なるネットワーク効果を検証する研究も行われており、Acemoglu, Akcigit, and Kerr (2016) は、ベンチマークモデルを需要サイドの効果も含むモデルに修正し、上流への後方関連効果と下流への前方関連効果を同時に検証している。Carvalho et al. (2016) は、生産関数を入れ子のCES構造で置き換えることによってベースラインモデルの一般化を行っている。またBaqaee and Farhi (2018) はさらに一般化し、異質なエージェントや任意にネストしたCES生産構造、複数かつ潜在的に産業固有の生産要素を持つモデルに拡張している。

本論文では、Acemogluらの議論にもとづいて実証分析を行い、日本の産業連関構造においてマクロ経済変動の「ネットワーク仮説」の妥当性について検証する。Acemogluらの論文では、前方関連効果に焦点を絞るための仮定が初めからモデルの設定に含まれており、論点が分かりづらい。また理論と実証分析の指標をつなぐ過程で行列を直接用いた導出を行っているため、煩雑で難解である。そこで第2節では、前方関連効果の分析に焦点を絞るためにモデルに課される仮定を明示しつつ、モデルのフレームワークを提示する。つづく第3節で、産業連関表のデータを用いて仮説を

検証するための指標について含意を明確にした上で、Acemogluらの証明とは異なる方法により簡明な証明を与える。4節で実際に産業連関表のデータを用いて分析を行い、日本経済における仮説の妥当性について検証する。

## 2. ネットワーク効果の分析モデル

本節では、多部門経済モデルにおいて前方関連効果にもとづくネットワーク効果を分析するフレームワークを提示する。Acemoglu et al. (2012)にしたがって、ベンチワーク・モデルにはLong and Plosser (1983)の多部門一般均衡モデルを静学モデルに修正したものを用いる。分析の焦点を前方関連効果に限定するために、モデルの仮定を明示的に検討する。

### 2.1 多部門一般均衡モデル

経済の供給サイドは  $n$  部門の競争的産業によって構成されており、企業は産業ごとに異なる製品を生産するものとする。産業間は投入産出関係による生産ネットワークで結ばれており、生産要素として労働力のほかに他の産業の生産物を中間投入として使う必要がある。産業内の企業はすべて同質であり、生産技術は規模に対して収穫一定であると仮定する。第  $j$  部門の代表的企業の生産技術はコブ・ダグラス型の次の生産関数

$$x_j = e^{\varepsilon_j} l_j^{\alpha_j} \prod_{i=1}^n x_{ij}^{a_{ij}} \quad (1)$$

で表される。ここで  $l_j$  は第  $j$  部門の労働量、 $x_{ij}$  は第  $j$  部門に投入される第  $i$  部門からの中間投入量である。 $\alpha_j > 0$  および  $a_{ij} \geq 0$  はそれぞれ労働と中間投入財の技術係数を表し、すべての  $j$  について

$$\alpha_j + \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (2)$$

日本におけるマクロ経済変動の「ネットワーク仮説」の検証が成り立つものとする。 $\varepsilon_j$ は第  $j$  部門に生じる Hicks 中立的な生産性ショックを表し、平均ゼロ、分散  $\sigma_\varepsilon^2$  の独立同分布 (iid) に従う<sup>1)</sup>。

一方、経済の需要サイドは代表的な家計の選好によって規定され、 $n$  個の消費財に対するコブ＝ダグラス型効用関数

$$u(c_1, c_2, \dots, c_n) = \Phi_n \prod_{i=1}^n c_i^{\theta_i} \quad (3)$$

で表されとする。ここで定数  $\theta_i \geq 0$  は財  $i$  に対する支出シェアを表すパラメータであり、支出シェアの合計は 1 になるように正規化されるものとする。選好をコブ＝ダグラス型に設定することにより、生産性ショックやネットワーク効果の発生に関わらず、消費支出のシェアはつねに一定となるため、消費の代替効果をモデルから取り除くことができる<sup>2)</sup>。

競争均衡は、生産物の価格および労働の賃金率を所与として、代表家計と企業がそれぞれ効用および利潤を最大化した上で、労働市場および財市場を同時に均衡させる価格、賃金率、生産量、消費量の組によって規定される。本研究では、GDP の水準ではなく相対的な変動の大きさに着目するために、Domar ウェイトを用いて経済の競争均衡を記述することとする。Domar ウェイトとは、その産業の売上高が GDP に占める割合のことである。この経済では支出は消費のみであるから、財  $i$  の価格を  $p_i$  とすると、第  $i$  部門の Domar ウェイトは、

$$v_i = \frac{p_i x_i}{GDP} = \frac{p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i c_i} \quad (4)$$

と定義される。Domar ウェイトを用いて競争均衡を求めると、生産物市場の均衡は、すべての  $i = 1, 2, \dots, n$  について

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j + \theta_i \quad (5)$$

となる。また、このとき生産要素の投入係数から生産要素への所得分配は、すべての  $i = 1, 2, \dots, n$  について

$$v_j = \alpha_j v_j + \sum_{i=1}^n a_{ij} v_j \quad (6)$$

と表される（導出は付録Aを参照）。

	第1部門	第2部門	・ ・ ・	第n部門	消費支出	生産
第1部門	$a_{11} v_1$	$a_{12} v_2$	・ ・ ・	$a_{1n} v_n$	$\theta_1$	$v_1$
第2部門	$a_{21} v_1$	$a_{22} v_2$	・ ・ ・	$a_{2n} v_n$	$\theta_2$	$v_2$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
第n部門	$a_{n1} v_1$	$a_{n2} v_n$	・ ・ ・	$a_{nn} v_n$	$\theta_n$	$v_n$
付加価値	$\alpha_1 v_1$	$\alpha_2 v_2$	・ ・ ・	$\alpha_n v_n$		
生産	$v_1$	$v_2$	・ ・ ・	$v_n$		

図 1：多部門一般均衡モデルの産業連関表

図 1 は、この多部門一般均衡モデルの産業連関表を表している。表のヨコ関係は生産物市場の均衡 (5) における販路構成を表しており、第  $i$  部門の生産物が誰に向けて供給されたかを表している。一方、表のタテ関係は所得分配 (6) による費用構成を表しており、第  $i$  部門の生産活動に投入された生産要素がどこから供給されたかを表している。図 1 は Domar ウェイトを用いて記述されいるため、水準ではなく部門間の比率を表している。表の行（ヨコ）方向の比率は第  $i$  部門からの財の産出関係の比率であり、中間財・最終財として第  $i$  部門が財を供給した先の構成比率を表している。表の列（タテ）方向の比率は第  $i$  部門の投入構造の比率であり、第  $i$  部門から他の部門への中間財需要の構成比率を表している。

投入係数行列を

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

とすると、上で設定した多部門経済の一般均衡は、

(a) 産業連関の部門分類： $\{1, 2, \dots, n\}$

(b) 生産性ショック： $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$

(c) 投入係数行列： $A_n = [a_{ij}]$

(d) 労働分配率： $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

(e) 消費支出シェア： $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$

の5つの要素によって完全に規定されている。このうち産業連関表の構造を規定しているパラメータは(c)～(e)の3種類である。

## 2.2 経済構造に関する仮定

産業連関構造を通じて部門間に働くネットワーク効果は、その波及する方向の違いから、中間財の供給を通じてネットワークの下流へ向かう「前方関連効果 (forward linkage effect)」と、中間財の需要を通じてネットワークの上流へ向かう「後方関連効果 (backward linkage effect)」に分類される。前方関連効果とは、ある産業に生産性ショックが生じたときに、その産業が供給する財の価格や供給量の変化を通じて、中間財の供給先(下流)の産業へ影響が波及することを指す。一方、後方関連効果とは、生産性が変化した産業自身の中間財需要の変化によって、その産業が中間財を購入する需要先(上流)の産業に対して影響が波及することを指す。

ネットワーク効果の波及する方向の違いは、産業連関表のタテ・ヨコの違いによって区別することができる。第*i*部門から他の産業部門への中間財の供給構造は投入係数行列 $A_n$ の表す行ベクトル $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ によって表されるから、前方関連効果は産業連関表のヨコ方向の成分の作用によって生じる効果である。一方、他の産業部門から購入する第*i*部門の中間財の需要構造は投入係数行列 $A_n$ の列ベクトル $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})'$ によって表されるから、後方関連効果は産業連関表のタテ方向の成分の作用によって生じる効果である。

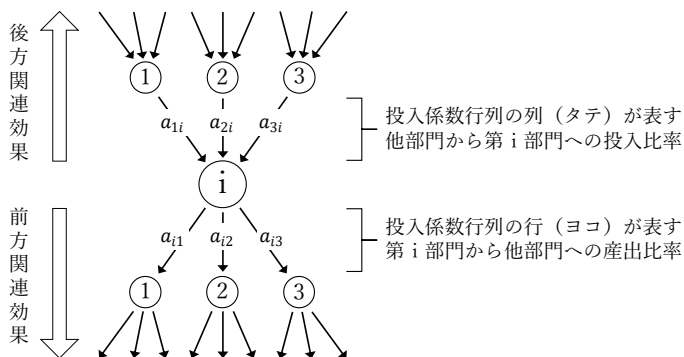


図 2：投入係数行列  $A_n$  と波及効果の関係

産業連関ネットワークの構造が対称で、どの部門からどちらの方向を向いても均質であれば、ネットワーク効果は発生しない。ネットワーク効果による GDP の変動（分散）は、ショックが伝播するネットワークの構造が場所や方向に対して非対称（asymmetric）であることから生じる。多部門経済モデルの産業連関構造においては、行（ヨコ）方向の供給構造にも列（タテ）方向の需要構造にも非対称性があり、前方関連効果と後方関連効果が相互に絡み合っている。ここでは分析の焦点を行方向の供給構造に起因する前方関連効果に限定するために、列方向の需要構造について 2 つの均質性（homogeneity）の仮定を設ける<sup>3)</sup>。

一つは、消費支出の部門別シェアの均質性である。コブ＝ダグラス型選好の仮定によりショックに対して支出シェアは不変であるが、部門間の支出シェア  $\theta_i$  は均等でない。そのため各部門の最終需要に偏りが生じ、後方関連効果が非対称になる。この影響を取り除くために消費支出シェアは部門間で均等で

$$\theta_i = \frac{1}{n} \quad (8)$$

であると仮定する。

もう一つは、労働分配率の均質性である。生産性ショックは中間財需要



の変化を通じて上流の産業に対する需要を変化させる。生産要素に占める中間投入比率が部門ごとに異なっていたとしたら、各部門の中間財需要が経済に与えるインパクトの大きさに部門ごとの偏りがあることになる。中間投入比率の偏りがあると、ネットワークに生じる後方関連効果が非対称になる。この要因を取り除くために、労働分配率はすべての部門で均質

$$\alpha_i = \alpha \quad (9)$$

であると仮定する。これにより投入係数行列  $A_n$  の列方向（タテ方向）の合計で表される中間投入比率は均質

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 - \alpha \quad (10)$$

となる。この関係を用いて、あらためて基準化された投入係数を

$$w_{ij} \equiv \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} = \frac{a_{ij}}{1 - \alpha} \quad (11)$$

と定義すると、投入係数行列  $A_n$  は列和を 1 となるように基準化された行列  $W_n$  を用いて

$$A_n = (1 - \alpha)W_n = (1 - \alpha) \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

と表すことができる。ここで  $W_n$  は各産業を頂点として第  $i$  部門から第  $j$  部門への辺の重みを  $w_{ij}$  とする重み付き有向グラフの隣接行列である。

以上の設定のもとで、多部門経済モデルの構造を規定するのは次の 3 つの要素に集約される。

(a) 産業連関の部門分類：  $\{1, 2, \dots, n\}$

(b) 生産性ショック：  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$

(c') ネットワークの隣接行列：  $W_n = [w_{ij}]$

$W_n$  で表されるネットワークの重み付き入次数（weighted indegree）は、隣接行列  $W_n$  の列和

$$d_i^{in} = \sum_{i=1}^n w_{ij} = 1 \quad (13)$$

で表され、部門間で均質に 1 に基準化されている。一方、重み付き出次数 (weighted outdegree) は  $W_n$  の行和

$$d_i^{out} = \sum_{j=1}^n w_{ij} \quad (14)$$

表され部門間で不均質である。したがって、ネットワーク効果は重み付き出次数  $d_i^{out}$  の偏りによって生じる前方関連効果に限定される。すなわちネットワーク効果は、重み付き出次数の次数列  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  の不均質さ (heterogeneity) のみに由来することになる。

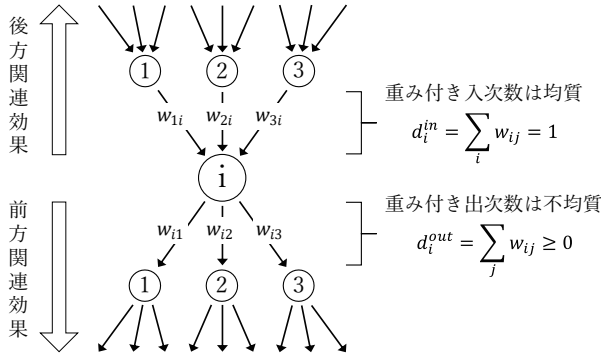


図 3：隣接行列  $W_n$  と波及効果の関係

### 2. 3 GDP のボラティリティの計量

Domar ウェイトのベクトルを  $v_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)'$  とすると、消費支出シェアの均等の仮定 (8) および生産物市場の均衡条件 (5) より、

$$v_n = \frac{1}{n} [\mathbb{I}_n - (1 - \alpha) W_n]^{-1} \mathbf{1} \quad (15)$$

と表すことができる。ここで  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)'$  は  $n$  個の要素がすべて 1 のベクトル、 $[\mathbb{I}_n - (1 - \alpha) W_n]^{-1}$  はレオンチェフ逆行列である。競争均衡におけ

日本におけるマクロ経済変動の「ネットワーク仮説」の検証  
 る実質GDP（の対数値）は、Domar ウェイト（4）を係数とする産業レベルの生産性ショックの線形結合

$$y_n \equiv \log(\text{GDP}) = \mathbf{v}'\boldsymbol{\varepsilon} = v_1 \varepsilon_1 + \cdots + v_n \varepsilon_n \quad (16)$$

で表することができる（導出は付録Aを参照）。これよりショックに対する対数GDPへの波及効果が

$$\frac{d y_n}{d \varepsilon_i} = v_i \quad (17)$$

により得られる。この式はHultenの定理として知られており、Domar ウェイトはモデルに生じるネットワーク効果（前方関連効果）の十分統計量を与えるものとなる<sup>4) 5)</sup>。

個別企業に生じる生産性ショック  $\varepsilon_i$  は平均ゼロ、分散  $\sigma_\varepsilon$  の互いに無相関の独立同分布 (iid) に従うことに注意すると、対数GDPの分散は、Domar ウェイトを用いて、

$$\begin{aligned} \text{var}(y_n) &= E[y_n^2] = E[(v_1 \varepsilon_1 + \cdots + v_n \varepsilon_n)^2] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n (v_i \varepsilon_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j \varepsilon_i \varepsilon_j\right] \\ &= \sum_{i=1}^n v_i^2 E[\varepsilon_i^2] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j E[\varepsilon_i \varepsilon_j] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 (v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \|\mathbf{v}_n\|_2^2 \end{aligned} \quad (18)$$

と表すことができる。対数GDPのボラティリティ（標準偏差）が、Domar ウェイトのベクトルのユークリッド・ノルム  $\|\mathbf{v}_n\|_2$  のみに依存するため、Domar ウェイトの分散が大きいほど個別産業の生産性ショックが生み出す前方関連効果の非対称性も大きくなる。これは産業部門ごとのDomar ウェイトに大きな異質性がある場合、個別産業に生じた生産性ショックによって引き起こされるネットワーク効果の大きさに偏りが生じ、集計化の過程で相殺されずに残存してしまうからである<sup>6)</sup>。

### 3. ネットワーク効果の計量手法

前節の議論により、Domar ウェイトはモデルの均衡GDPのボラティリティの十分統計量であることがわかった。本研究の目的であるネットワーク構造とGDPのボラティリティの関係を実証的に分析するには、Domar ウェイトを産業連関表の情報により評価できるようにする必要がある。そこで本節では、レオンチェフ逆行列に含まれる隣接行列  $W_n$  の情報から Domar ウェイトを評価する方法を検討する。

#### 3.1 高次のネットワーク構造

産業間の供給ネットワークは幾重にも重なっており、直接の取引先だけでなく、取引先の取引先、またその先の取引先とつづく「高次のネットワーク (higher order network)」を構成している。ネットワーク上の伝播メカニズムは高次のネットワーク構造に影響を受ける。レオンチェフ逆行列のベキ級数展開

$$[\mathbb{I}_n - (1 - \alpha)W_n]^{-1} = \mathbb{I}_n + (1 - \alpha)W_n + (1 - \alpha)^2 W_n^2 + \dots \quad (19)$$

は、こうした高次のネットワークを通じて累積的に生じる波及効果を表している<sup>7)</sup>。ベキ級数の第  $i$  成分を用いて第  $i$  部門の Domar ウェイトを表すと

$$v_i = \frac{1}{n} \left( 1 + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^n w_{ij} + (1 - \alpha)^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_{ij} w_{jk} + \dots \right) \quad (20)$$

となる。カッコ内の第 1 項は生産性ショックが自分自身に及ぼす直接効果であり、第 2 項以降が中間財の供給ネットワークを通じて伝播する前方関連効果の大きさを表している。ここで級数の次数にもとづいて、供給ネットワーク構造の「深さ」を次のように分類することにする。

カッコ内の第 2 項は、第  $i$  産業にとっての「直接の取引先」に及ぼす 1 次の波及効果の大きさを表している。この項は隣接行列  $W_n$  の行和であり、

ネットワークの重み付き出次数に比例している。そこで  $d_i^{out}$  を、あらためて「1 次の重み付き出次数 (first order weighted outdegree)」

$$d_i \equiv d_i^{out} = \sum_j^n w_{ij} \quad (21)$$

と再定義する。 $d_i$  が大きいほど直接の供給先に与えるネットワーク効果が大きいことを意味する。

カッコ内の第3項は、第  $i$  産業にとっての「取引先の取引先」までを含む2次の波及効果の大きさを表している。ここで新たに「2 次の重み付き出次数 (Second Order Weighted Outdegree)」を

$$q_i \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_{ij} w_{jk} = \sum_{j=1}^n w_{ij} d_j \quad (22)$$

と定義する。 $q_i$  は、第  $i$  部門の直接の供給先である第  $j$  部門の1次出次数  $d_j$  を  $i$  から  $j$  への投入係数  $w_{ij}$  で重み付けして、すべての直接供給先について線形結合を取ったものである。第  $i$  部門に生じた生産性ショックは第  $i$  部門が中間投入財を供給する第  $j$  部門の生産性を変化させ、それにより第  $j$  部門が供給する先の産業に影響を及ぼす。したがって  $q_i$  の値が大きいほど、第  $i$  部門から2次の繋がりをもつ「取引先の取引先」までの波及効果が大きいことを意味している。

図4は、産業部門数が  $n=3$  の場合の第  $i$  部門の2次出次数の構成方法を表している。実線は第  $i$  部門にとっての「直接の取引先」との繋がりを表しており、破線は第  $i$  部門にとっての「取引先とその先の取引先」の繋がりを表している。 $\{d_1, d_2, d_3\}$  は、第  $i$  部門からみて取引先が更にその先の産業に及ぼす2次的な伝播の大きさを表しており、 $q_i$  は2次的伝播を直接の取引先ごとのウェイト  $w_{ij}$  で重み付けして足し合わせたものである。

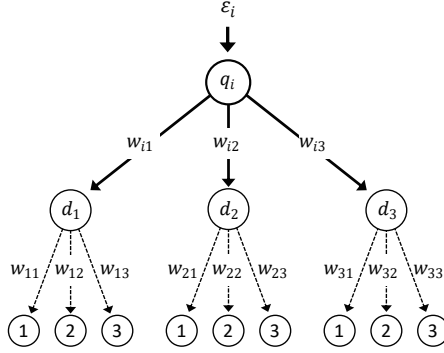


図4：2次の重み付き出次数の構成（ $n=3$ の例）

こうした高次のネットワーク構造は、製品の「汎用」性と関連している。1次の出次数  $d_i$  が高い場合は、第  $i$  部門自身が「汎用」的な製品を生産し他の多くの産業に投入されている。2次の出次数  $q_i$  が高い場合は、第  $i$  部門が供給する取引先の産業が「汎用」性の高い製品を生産し、その先の産業に向けて供給している。こうした汎用性の高さによって、より大きな前方関連効果が生じるのである。

### 3. 2 2次の相互結合性とカスケード効果

ここでは2次の項までを考慮に入れることにし、(20) に  $d_i$  および  $q_i$  を代入してDomar ウェイトのユークリッド・ノルムを評価すると、

$$\begin{aligned}
 \|v_n\|_2^2 &\geq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (1 + (1-\alpha)d_i + (1-\alpha)^2 q_i)^2 \\
 &= \frac{\alpha^2}{n^2} \left[ n + 2(1-\alpha) \sum_i d_i + (1-\alpha)^2 \sum_i d_i^2 + 2(1-\alpha)^2 \sum_i q_i \right. \\
 &\quad \left. + 2(1-\alpha)^3 \sum_i d_i q_i + (1-\alpha)^4 \sum_i q_i^2 \right] \quad (23)
 \end{aligned}$$

となる。ここで最後の項を展開すると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n q_i^2 &= \sum_{i=1}^n \left( w_{ii}d_i + \sum_{j \neq i} w_{ij}d_j \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n w_{ii}^2 d_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} w_{ii}d_i w_{ij}d_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} w_{ij}^2 d_j^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} w_{ij}d_j w_{ik}d_k\end{aligned}$$

となる。Acemoglu et al. (2012) では、この式の最後の項

$$\tau_2(W_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} w_{ij}d_j w_{ik}d_k \quad (24)$$

を、2次の相互結合係数（second-order interconnectivity coefficient）と呼んでいる<sup>8)</sup>。この項は、 $d_i$ によって測られる「汎用性」の高さとは異なる、産業間のクラスターによるネットワーク構造の相関関係を測っていることに注意する必要がある。

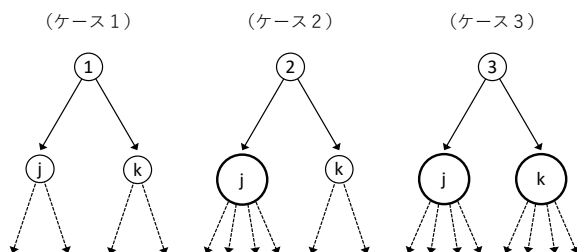


図5：2次のネットワーク相互結合性

図5は、この項で測られているネットワーク構造の違いを表している。1段目の実線で表される「直接の取引先」の関係はどれも同じであるため、1次の出次数は  $d_1 = d_2 = d_3$  となり均質である。しかし、2段目の破線で表される「取引先の取引先」まで含む2次の繋がりは大きく異なる。ケース2やケース3は、取引先にハブがあるかないかによって下流の下流に与える影響が異なり、2次の出次数は  $q_1 < q_2 < q_3$  と不均質になる。(24) は、こうした差を生み出す2次の構造のうち、jとkが共通のサプライヤーiの下流にいることによるjとkの相関の強さを表している。

Acemogluらは、(24) で表されるクラスタリングによるネットワーク構造を「2次の相互結合性 (second-order interconnectivity)」と呼んでいる。2次の相互結合性は、巨大な企業や産業部門が、共通の供給者を介して結びつくことによる相関関係の強さを表している。巨大な企業や産業は、それ自体がショックを引き起こさなくても、他の産業のショックを増幅させる機能がある。2つの巨大産業が上流に共通のサプライヤーをもつ場合には、ネットワークを通じたショックの伝播にも相関関係が存在し、波及効果の非対称性を大幅に増幅させる。例えば、巨大な自動車メーカーが共通のサプライヤーから部品を調達しているとする、サプライヤーからの部品供給の停止は、巨大自動車メーカーの生産を停止させ、経済全体に甚大な影響を与える。実際、東日本大震災では、一部の部品メーカーの被災により部品供給が停止したことにより、世界中の自動車生産に影響が及んだ。2次の出次数  $q_i$  を考慮することで、こうしたカスケード効果の影響を考慮に入れた評価が可能になる。

### 3.3 ベキ指数による漸近的下限の評価

Domar ウェイトのユークリッド・ノルムを  $d_i$  および  $q_i$  を用いて評価することにより、

$$\|v_n\|_2^2 \geq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (1 + (1 - \alpha)d_i + (1 - \alpha)^2 q_i)^2 \quad (25)$$

で表すことができた。したがって均衡GDPのボラティリティは、1次および2次の重み付き出次数の次数列  $\{d_i\}$ 、 $\{q_i\}$  の分布の不均質さ (heterogeneity) の度合いによって評価できる。部門間の不均質さはサイズの「桁」の違いによって測ることができる。全体の平均値と比べて次数のサイズが1桁大きいような部門が、無視できない割合で存在するとき、次数列  $\{d_i\}$ 、 $\{q_i\}$  は不均質であるといえる。こうした不均質さが存在すれば、前項でみたカスケード効果が生じる可能性がある。



「桁」の違いによる不均質さの度合いは、ベキ分布（Power Law）を用いて評価することができる。1 次と 2 次の次数列  $\{d_i\}$ 、 $\{q_i\}$  の分布の裾が、それぞれ次の相補累積分布関数

$$P(d_i > x) = C_d x^{-\beta} \quad (26)$$

$$P(q_i > x) = C_q x^{-\zeta} \quad (27)$$

のベキ分布に従うとする。ここでベキ指数  $\beta$ 、 $\zeta$  は分布の裾の傾きを表す形状パラメータである。ベキ指数はベキ分布に従うサンプルの「桁」の違いによる不均質さの度合いを表しており、この値が小さいほど不均質の度合いが大きい。

ベキ指数  $\beta$ 、 $\zeta$  の値が両方とも 2 よりも大きいとき、産業間ネットワークの不均質さは低く、どちらの方向をみても比較的均質につながっている。個別の産業にショックが生じたとしても、その影響はネットワークの各方向に均質的に波及するため、個別のショックは経済全体でみた場合には平準化され比較的早期に減衰する。反対に指数のどちらか一方でも 2 よりも小さい場合は、産業ネットワークの繋がり方が大きく不均質で、「桁」のレベルで大きな違いがある。そうした「桁」違いに大きな産業を経由することによって、ショックの伝播に大きな偏りが生じネットワーク効果を生じる。このネットワーク効果によってミクロ・レベルのショックがなかなか減衰せず、経済全体への影響は比較的長期間残り続ける。

ベキ指数  $\beta$ 、 $\zeta$  を用いると、GDP のボラティリティの下限は以下のように評価することができる。1 次と 2 次の重み付き出次数が (26) および (27) のベキ分布に従うとき、

$$B_i = 1 + (1 - \alpha)d_i + (1 - \alpha)^2 q_i$$

とおくと、ベキ分布の性質

$$\begin{aligned} \xi_{aX} &= \xi_X \\ \xi_{X^a} &= \xi_X / a \\ \xi_{X+Y} &= \min[\xi_X, \xi_Y] \\ \xi_{XY} &= \min[\xi_X, \xi_Y] \end{aligned}$$

から、 $B_i^2$ はベキ分布

$$P(B_i^2 > x) = C_B x^{-\xi/2} \quad (\xi = \min[\beta, \zeta]) \quad (28)$$

に従う。 $\mathcal{L}(a)$ を指数 $a$ のレヴィ分布とすると、一般化中心極限定理により、十分大きな $n$ に対して

$$\frac{1}{n^{2/\xi}} \left( \sum_i^n B_i^2 \right) \xrightarrow{d} \mathcal{L}(\xi/2)$$

の分布収束が成り立つ。これを変形すると

$$\frac{1}{n^{-(\xi-1)/\xi}} \cdot \frac{1}{n} \left( \sum_i^n B_i^2 \right)^{1/2} \xrightarrow{d} \mathcal{L}(\xi/2)^{\frac{1}{2}}$$

となるから、十分大きい $n$ に対して

$$\|v_n\|_2 \geq \frac{1}{n} \left( \sum_i^n B_i^2 \right)^{1/2} = \Theta \left( \frac{1}{n^{(\xi-1)/\xi}} \right)$$

が成り立つ。これよりGDPのボラティリティは、 $\xi = \min[\beta, \zeta]$ として

$$\text{var}(y_n)^{\frac{1}{2}} = \sigma_\varepsilon \|v_n\|_2 = \Omega \left( \frac{1}{n^{(\xi-1)/\xi}} \right) \quad (29)$$

によって漸的に下から抑えられることがわかる。

これにより本研究の分析指標は、最終的に、ベキ分布の指数 $\beta$ 、 $\zeta$ の値を推定することに帰着する。もしどちらも値が2より大きければ、部門分割を細分化し分割数 $n$ を大きくしたときのGDPのボラティリティの減衰スピードの下限は $1/\sqrt{n}$ となる。どちらか一方でも2よりも小さい場合は、部門分割を細分化し分割数 $n$ を大きくしたときの減衰スピードは $1/\sqrt{n}$ よりも遅くなる。

#### 4. 実証分析の結果

本節の目的は、ベキ指数 $\beta$ 、 $\zeta$ の大きさを推計することである。隣接行列 $W_n$ は産業連関表の投入係数表から作成し、1次と2次の次数列 $\{d_i\}$ 、 $\{q_i\}$ について経験密度関数および経験分布関数を推定する。関数の推定に

日本におけるマクロ経済変動の「ネットワーク仮説」の検証  
はノンパラメトリック推定を用いる。

#### 4. 1 分析に用いるデータ

隣接行列  $w_n$  を作成するデータには、総務省が公表している産業連関表（全国表）の確報を用いた。もっとも詳細な分類である取引基本表の基本分類はタテとヨコのサイズが異なっているため、正方形行列としてデータが得られる統合小分類を分析に用いた。産業連関表の全国表はe-Statから入手可能であるが、確報のうちexcelデータとして公表されているのは1995年以降であり、2000年と1995年については中分類までしか掲載されていないため、ベキ指数の推定には2015年、2011年、2005年の3つを用いた<sup>9)</sup>。

#### 4. 2 密度関数のノンパラメトリック推定

はじめに次数列  $\{d_i\}$ 、 $\{q_i\}$  の確率密度（Empirical Density）を分析する。推定にはカーネル密度推定を用い、カーネル平準化関数には正規分布を採用した。また最小自乗クロス・バリデーション（Least-Squares Cross-Validation）により最適なバンド幅を選択した。

まず、産業連関表の投入係数行列  $A_n$  の列和から基準化前の中間投入比率（ $A_n$  の入次数）を計算し、各産業の生産額に占める中間投入率のカーネル密度を推計した（表1、図6）。年やセクターをまたいで中間投入率の平均を取ると約0.56となった。各年の平均値については約0.53から約0.59の間で推移しており、この数値は時系列的に安定している。また標準偏差も0.2未満に収まっており、部門間で多少のばらつきはみられるものの、概ね平均値付近に集中しているといえる。興味深いことに、Acemoglu et al. (2012) によれば、米国のデータによる年・産業をまたいだ平均は0.55、各年の平均値の時系列は0.52から0.58の間で推移しており、日本のケースとほぼ等しい。他の研究でも近い数値が報告されている。

表 1：中間投入率の平均値の推移

	2015	2011	2005	2000	1995	平均
年平均	0.55	0.59	0.58	0.55	0.53	0.56
標準偏差	0.18	0.19	0.19	0.19	0.18	－
バンド幅	0.23	0.27	0.28	0.31	0.28	－
標本数	186	189	189	104	93	－

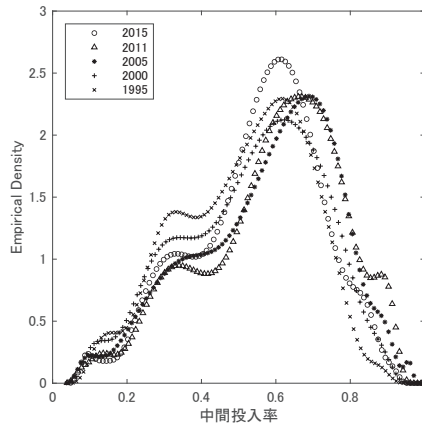


図 6：中間投入率の密度関数

次に重み付き出次数のカーネル密度を推計した。図 7 をみると、右肩下がりの歪んだ分布になっていることがわかる。1 次の重み付き出次数 ( $d_i$ ) の分布の歪みは第  $i$  部門「自身」が汎用的な製品を生産している度合いを反映しており、2 次の重み付き出次数 ( $q_i$ ) の分布の歪みは第  $i$  部門の「取引先」が汎用的な製品を生産している度合いを反映している。どちらの場合も、その汎用性の度合いに「桁」違いの差が存在することを示唆しており、産業間のネットワークの結びつき方が均質ではないことを示している。

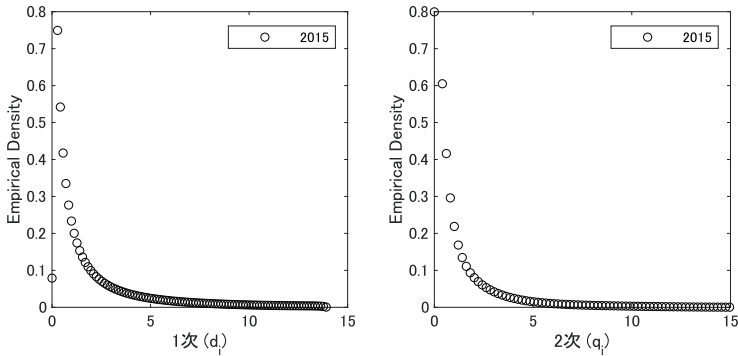


図7：重み付き出次数の密度関数

#### 4.3 相補累積分布関数のノンパラメトリック推定

重み付き出次数の分布がベキ分布にしたがうことを検証するために、Nadaraya-Watsonカーネル回帰を用いて相補累積分布関数（CCDF）を推計した。いずれも最小二乗クロスバリデーションにより最適なバンド幅を選択した。データによる経験分布（CCDF）とNadaraya-Watsonカーネル回帰の推定値を重ねて、対数スケールでプロットしたものは、図8にまとめられている。どの年においても、1次・2次ともに分布の裾の部分は対数線形関係が成り立っており、分布の裾の部分がベキ分布によって近似できる。

#### 4.4 ベキ分布の形状パラメータの推定

Gabaix and Ibragimov (2011) は、単純なOLS推定をもちいてベキ分布の形状パラメータを推定すると、小標本のときに下方バイアスがかかることを示している。これを防ぐために彼らは、

$$\log\left(\text{Rank} - \frac{1}{2}\right) = a - b \log(\text{Size}) \quad (30)$$

のように順位を1/2だけシフトさせた修正対数ランク-対数サイズ回帰を提案している。ここでベキ指数はbに対応し、 $\log(\text{Rank})$ は順位の対数、

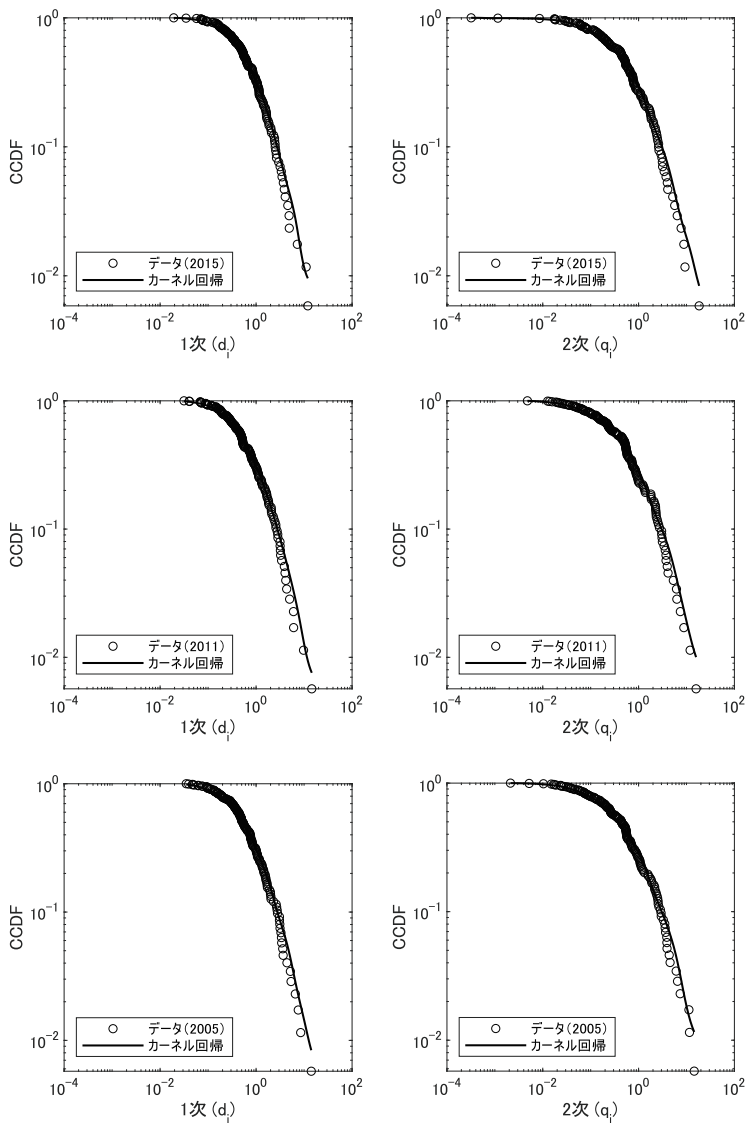


図8：重み付き出次数の相補累積分布関数

$\log(\text{Size})$  はサイズの対数値となる。ここでは、(30) による修正OLSをもちいてパラメータの推定をおこなう。20対80の法則に鑑みて、ベキ分布の裾の範囲はサンプル順位の上位20%でカットオフすることとする。また比較のために、同じサンプルについてNadaraya-Watsonカーネル回帰により求めた相補累積分布関数の傾きの平均を推計する。

表2は(30)による修正OLSによる推定値、表3はNadaraya-Watsonカーネル回帰の傾きを用いた推定値である。どちらの推計結果においても、 $\beta$ と $\zeta$ の両方ともが2より小さく、重み付き出次数の部門間の不均質性が大きいことを示唆している。これらの推定結果は、日本経済の産業連関ネットワークにおける役割が産業ごとに大きく不均質であることを意味する。この結果は前方関連効果に起因する経済変動の「ネットワーク仮説」と整合的である。

また $\beta$ と $\zeta$ の比較では、どちらの推計方法においても $\zeta$ の方が値が小さく、1次の次数列よりも2次の次数列の不均質さの方が大きいことを示唆している。これは産業間の直接の取引関係よりも、「取引先の取引先」までを含む高次のネットワークの方が部門間の不均質さの度合いが大きく、ネットワーク効果における影響が大きいことを示唆するものである。

年をまたいで平均すると、修正OLSの推定値の平均はそれぞれ $\beta = 1.77$ と $\zeta = 1.56$ 、Nadaraya-Watsonカーネル回帰の傾きの平均は $\beta = 1.46$ と $\zeta = 1.25$ であった。一方、Acemoglu達による米国の結果では、修正OLSが $\beta = 1.38$ と $\zeta = 1.18$ 、カーネル回帰の傾きが $\beta = 1.28$ と $\zeta = 1.17$ と報告されており、米国の推計結果に比べて日本の推計結果の方が数値がやや大きい。ただし、Acemoglu達の研究が500部門前後の詳細な分割データを用いているのに対し、本研究では180部門程度の部門分割データを用いているため、部門分割における非集計化（disaggregation）の影響が反映しているものと類推される。したがって、この結果から単純に日本の方が産業間の不均質性が小さいと結論づけることはできない。

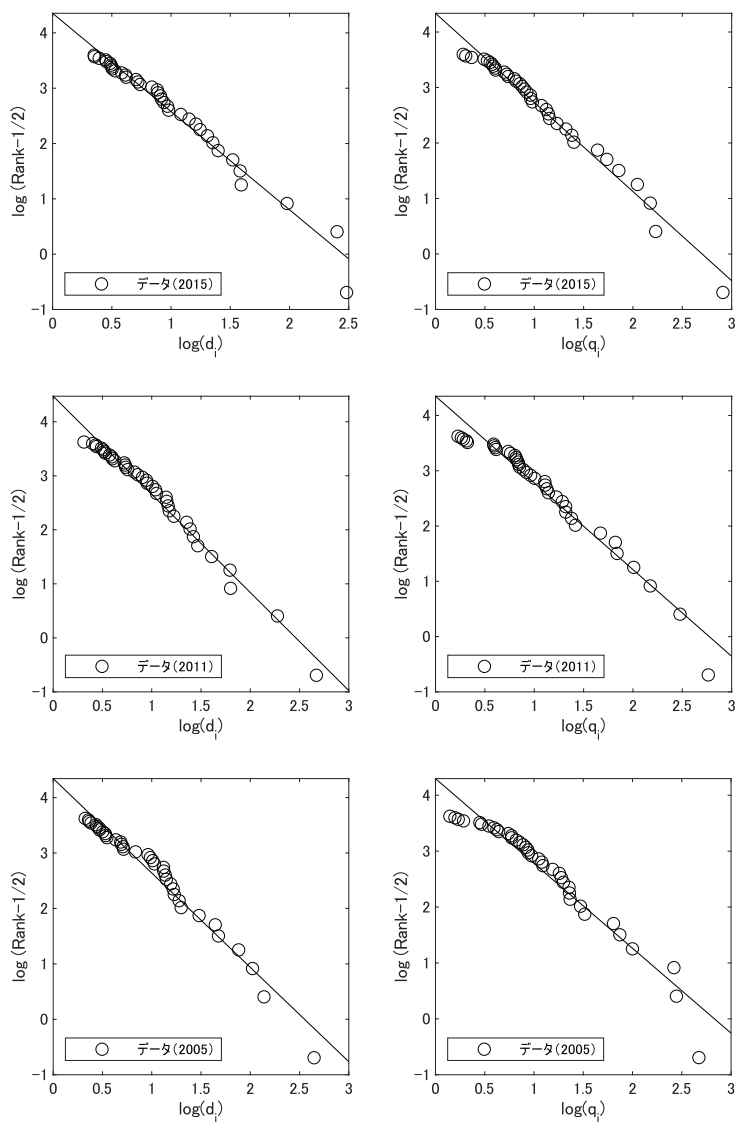


図9：修正OLSによる裾分布のパラメータ推定



表 2：指数の推定値（修正 OLS ランク＝サイズ回帰）

	2015	2011	2005	平均
$\hat{\beta}$	1.78 (0.41)	1.82 (0.42)	1.70 (0.39)	1.77
$\hat{\zeta}$	1.61 (0.37)	1.57 (0.36)	1.52 (0.35)	1.56
サンプル数	37	38	38	
部門数	186	189	189	

( ) 内は標準誤差。サンプル数はサイズの上位20%を採用。

表 3：指数の推定値（Nadaraya=Watson カーネル回帰）

	2015	2011	2005	平均
$\hat{\beta}$	1.50 (0.33)	1.45 (0.33)	1.44 (0.34)	1.46
$\hat{\zeta}$	1.26 (0.39)	1.26 (0.38)	1.23 (0.38)	1.25
サンプル数	37	38	38	
部門数	186	189	189	

( ) 内はカーネル回帰のバンド幅。サンプル数は上位20%を採用。

## 5. 結論

本論文では、Acemoglu et al. (2012) の提示した「ネットワーク仮説」が日本経済にも妥当するか否かを検証した。第2節においてAcemogluらが提示したモデルの前提を整理し、前方連関効果によるネットワーク効果を抽出するためにどのような仮定が機能しているかを明示的に示した。第3節では、Domar ウェイトと高次のネットワーク結合性の指標の関連性を示し、1次と2次の重み付き出次数の分布を推計することで仮説が検証可能であることを証明した。第4節では、ノンパラメトリック推計を用いて1次と2次の出次数の分布を推計し、分布の裾のベキ指数を推定した。その結果、日本においても各産業の出次数列の分布は指数2未満のベキ分布に従っており、産業連関ネットワークの構造に「桁」違いの不均質さが

存在することがわかった。こうした不均質さの存在は、Acemogluらの「ネットワーク仮説」が日本においても妥当であることを示唆している。また1次と2次の出次数列の分布に対するベキ指数の差から、ネットワーク効果は産業間の高次のネットワーク結合性においてより強く働き、相互連結性によるクラスタリングの効果が生じていることも明らかになった。

今後の研究に向けての課題は次の3点である。一つは、より詳細な部門分割データの利用である。本論文では統合小分類の投入係数表を用いたため、部門分割数は186部門・189部門となり、Acemogluらの半分程度となっている。また時系列においてもAcemogluらに比べ短い期間しか用いていない。実証分析ではAcemogluらと同等の結果が得られており、こうした違いは本質的な問題点ではないものの、より正確な実証分析のためには、もっとも詳細な基本取引表・基本分類の活用がのぞましい。基本分類は行と列で分割数が異なっており、部門の整理を行わないと分析に使用できないのが難点であるが、2015年確報で行509部門×列391部門あり、部門を一致させて整理すれば400近いサンプルが得られる。また1970年にさかのぼって分析が可能になる。もう一つは非集計化（disaggregation）とネットワーク効果の関係についての分析である。Acemogluらの研究では、部門分割の細分化の度合いが異なるケースについて比較を行い、非集計化（disaggregation）とネットワーク効果の関係についても実証分析しているが、本論文ではこの点については扱っていない。非集計化の影響の分析は主要な論点ではないものの、主張の頑健性を補完するために必要な検証であるといえる。最後に、需要ショックの分析や後方関連効果を含めた、より一般的な枠組みでの分析である。こうした拡張を含む継続研究がすでに多数試みられており、今後の課題としたい。

## 注

- 1) Carvalho et al. (2016) は、生産関数を入れ子のCES構造で置き換えることによって、ベースラインモデルの一般化を行っている。また Baqaee and Farhi (2018) はさらに一般化し、異質なエージェント、任意にネストしたCES生産構造、複数かつ潜在的に産業固有の生産要素を持つモデルに拡張している。
- 2) Acemoglu, Akcigit, and Kerr (2016) は、ベンチマークモデルを需要サイドの効果も含むモデルに修正し、上流への後方関連効果と下流への前方関連効果を同時に検証している。
- 3) Acemoglu et al. (2012) では、当初からこれらの仮定をおいたモデルを設定している。
- 4) (15) 式は Bonacich の中心性も表している。したがって Domar ウェイトが高い産業は、経済の投入産出ネットワークにおいて Bonacich の中心性の意味での重要な役割を担っている産業である。ある特定の産業部門が中心적であればあるほど、その部門に生じるショックが大きな前方関連効果を生じることことを意味する。
- 5) Domar ウェイトは、Hulten (1978) や Garbaix (2011) の研究において、「売上高ベクトル」と関連づけられる。Domar ウェイトが (15) 式で表されるような単純な形を取るの、消費者の選好と各産業の生産関数が共にコブ=ダグラス型という単純な形で与えられていることに依存しているが、この関係は「Hulten の定理」と呼ばれ、より一般的に成り立っている。
- 6) Gabaix (2011) は、Domar のウェイトの分布の裾が十分に重く、Domar ウェイトに大きな異質性が存在する場合、企業または細分化された産業で構成される「粒」の影響が、集計されたマクロ・レベルの経済活動においても圧縮されずに残存し、集計量のボラティリティの減衰スピードが  $1/\sqrt{n}$  よりも遅くなることを示している。
- 7)  $W_n$  は非負行列でスペクトル半径が厳密に 1 より小さいから、レオンチェフ逆行列が常に存在し、 $W$  によってべき乗級数展開が可能である。
- 8) 本論文では、 $i$  から  $j$  への投入係数を  $w_{ij}$  と表しているのに対し、Acemoglu et al. (2012) では  $w_{ji}$  と表していることに注意せよ。
- 9) 日本の産業連関表は、10 府省庁の共同作業によりを 5 年ごとに作成している全国表の他に、全国表をベンチマークとして直近の産業構造を推計し経済産業省が毎年作成する延長産業連関表、日本を 9 つの地域に分割し経済産業省が作成する地域産業連関表、都道府県・市が作成する都道府県・市産業連関表、国際間取引を詳細に記述したもので経済産業省やアジア経済研究所が作成する国際産業連関表など、それぞれの目的に応じた多くの産業連関表が作成されている。

## 参考文献

- [1] Acemoglu, Daron, Ufuk Akcigit, and William Kerr (2016), "Networks and the macroeconomy: An empirical exploration." In National Bureau of Economic Research Macroeconomics Annual, volume 30, 276-335, University of Chicago Press.
- [2] Acemoglu, Daron, Vasco M. Carvalho, Asuman Ozdaglar, and Alireza Tahbaz-Salehi (2012), "The network origins of aggregate fluctuations." *Econometrica*, 80 (5), 1977-2016.
- [3] Baqaee, David R. and Emmanuel Farhi (2018), "Macroeconomics with heterogeneous agents and input-output networks." NBER Working Papers 24684.
- [4] Baqaee, David R. and Emmanuel Farhi (2019), "The macroeconomic impact of microeconomic shocks: Beyond Hulten's theorem." *Econometrica*, 87 (4), 1155-1203.
- [5] Carvalho, Vasco M. (2014), "From micro to macro via production networks." *Journal of Economic Perspectives*, 28 (4), 23-48.
- [6] Constantinescu, Mihnea. and Kristina Barauskaite (2018), "Network-based macro fluctuations: what about an open economy?" *Baltic Journal of Economics*, 18:2, 95-117.
- [7] Gabaix, X. (2011), "The granular origins of aggregate fluctuations." *Econometrica* 79, 733-772.
- [8] Horvath, Michael (1998), "Cyclicalities and sectoral linkages: Aggregate fluctuations from sectoral shocks." *Review of Economic Dynamics*, 1 (4), 781-808.
- [9] Hulten, Charles R. (1978), "Growth accounting with intermediate inputs." *The Review of Economic Studies*, 45 (3), 511-518.
- [10] Jovanovic, Bryan. (1987), "Micro Shocks and Aggregate Risk." *The Quarterly Journal of Economics*, 102 (2), 395-409.
- [11] Long, John B. and Charles I. Plosser (1983), "Real business cycles." *Journal of Political Economy*, 91 (1), 39-69.
- [12] Lucas, Robert E. (1977), "Understanding business cycles." *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 5, 7-29.
- [13] Shea, John (2002), "Complementarities and comovements." *Journal of Money, Credit and Banking*, 34 (2), 412-433.

## 付録A：多部門経済モデルの競争均衡の導出

競争均衡は、以下の条件1.～3.を同時にみたす生産物の価格  $p_i$ 、賃金率  $h$ 、消費需要  $c_i$ 、中間財需要  $x_{ij}$ 、生産量  $x_i$  の組である。

1. 価格・賃金率を所与として、代表家計が効用を最大化する。
2. 価格・賃金率を所与として、各部門の代表企業が利潤を最大化する。
3. 労働市場および財市場が同時に均衡する。

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (A1)$$

$$1 = \sum_{i=1}^n l_i \quad (A2)$$

### (1) 生産者の最適化

生産者は生産物価格  $p_i$  と賃金率  $h$  を所与として、生産関数 (1) のもとで

$$C = hl_j + \sum_{i=1}^n p_i x_{ij}$$

を最小化する。1 階の条件は、すべての  $i, j$  について

$$\frac{hl_i}{p_i x_{ij}} = \frac{\alpha_i}{a_{ij}} \quad (A3)$$

となる。収穫一定であるから利潤

$$\pi_j = p_j x_j - hl_j - \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} = 0$$

に 1 階の条件を代入すると、労働需要および中間財需要は、それぞれ

$$l_j = \frac{\alpha_j p_j x_j}{h} \quad (A4)$$

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} p_j x_j}{p_i} \quad (A5)$$

となる。

## (2) 代表的家計の最適化

代表的家計は1単位の労働を各産業部門に分割して非弾力的に供給し、は賃金率  $h$  の所得を得ている。効用関数 (3) を予算制約

$$\sum_{i=1}^n p_i c_i = h \quad (= \text{名目 GDP}) \quad (\text{A6})$$

のもとで最大化すると、1階の条件は、すべての  $i, j$  について

$$\frac{p_i c_i}{p_j c_j} = \frac{\theta_i}{\theta_j}$$

となる。これより第  $i$  部門の消費財への消費関数は、

$$c_i = \frac{\theta_i h}{p_i} \quad (\text{A7})$$

となる。

## (3) 競争均衡における Domar ウェイト

生産物市場の均衡 (A1) に財の価格をかけて、消費関数 (A7) と中間財需要 (A5) を代入し、さらに Domar ウェイトで表すと、

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j + \theta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

となる。ベクトルで表して整理すると、Domar ウェイトは

$$\mathbf{v} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \boldsymbol{\theta} \quad (\text{A8})$$

となる。また均等化の仮定 (8) および隣接行列  $W_n$  のもとでは、

$$\mathbf{v} = \frac{1}{n} [\mathbf{I} - (1 - \alpha) W_n]^{-1} \mathbf{1} \quad (\text{A9})$$

となる。

## (4) 間接効用で測った実質 GDP

効用関数に各財の需要関数を代入すると

$$V(\mathbf{p}, h) = \Phi_n \prod_{i=1}^n \left( \frac{\theta_i h}{p_i} \right)^{\theta_i} = \prod_{i=1}^n h^{\theta_i} \left( \frac{1}{\Phi_n} \prod_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{\theta_i} \right)^{\theta_i} \right)^{-1}$$

ここで物価指数  $P$  を以下のように定め、 $P = 1$  になるよう  $\Phi_n$  を基準化する。

日本におけるマクロ経済変動の「ネットワーク仮説」の検証

$$P = \frac{1}{\Phi_n} \prod_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{\theta_i} \right)^{\theta_i} = 1 \quad (\text{A10})$$

すると間接効用関数は

$$V(\mathbf{p}, h) = \prod_{i=1}^n h^{\theta_i} = h \quad (\text{A11})$$

となり、賃金率  $h$  が間接効用で測った実質 GDP を表す。

## (5) 実質 GDP の導出

生産関数 (1) を対数変換すると

$$\log x_j = \varepsilon_j + \alpha \log(l_i) + \sum_{i=1}^n (1 - \alpha) w_{ij} \log x_{ij}$$

これに要素需要関数 (A4)、(A5) を代入すると

$$\log x_j = \varepsilon_j + \alpha \log \left( \frac{\alpha p_j x_j}{h} \right) + \sum_{i=1}^n (1 - \alpha) w_{ij} \log \left( \frac{(1 - \alpha) w_{ij} p_j x_j}{p_i} \right)$$

となる。これを根気よく整理すると、

$$\begin{aligned} \alpha \log(h) = \varepsilon_j + \log(p_j) - \sum_{i=1}^n (1 - \alpha) w_{ij} \log(p_i) \\ + [\alpha \log(\alpha) + (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)] + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n w_{ij} \log(w_{ij}) \end{aligned}$$

をえる。ここで

$$D = \alpha \log(\alpha) + (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)$$

$$H = \sum_{i=1}^n w_{ij} \log(w_{ij})$$

とおきベクトル・行列で表すと

$$\alpha \log(h) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} + [\mathbb{I} - (1 - \alpha)W] \begin{bmatrix} \log(p_1) \\ \log(p_2) \\ \vdots \\ \log(p_n) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}$$

さらにDomar ウェイトをかけると

$$\log(h) = \mathbf{v}'\boldsymbol{\varepsilon} + \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log p_i + \frac{D}{\alpha} + (1 - \alpha)\mathbf{v}'\mathbf{H} \right]$$

となる。ここで、効用のシフトパラメータを

$$\log \Phi_n \equiv \frac{D}{\alpha} + (1 - \alpha)\mathbf{v}'\mathbf{H}$$

とおくと、物価指数  $P = 1$  より

$$\log P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log p_i + \log \Phi_n = 0$$

となる。したがって

$$\log(h) = \mathbf{v}'\boldsymbol{\varepsilon} = v_1 \varepsilon_1 + \cdots + v_n \varepsilon_n \tag{A12}$$

を得る。