

[論文]

大学生の論理的に思考する力の現状と課題

命題解釈の分析を通して

大塚 慎太郎

Issues on Undergraduate Students' Logical Thinking in Mathematics

Shintaro OTSUKA

The purpose of this study is to identify characteristics of undergraduate students, focusing on their interpretation of propositions. To explore this issue, we considered the methods of analysis to better understand students' interpretations and evaluated them based on contexts for learning mathematics. We analyzed students' responses to the three questions that asked them to assess a statement about the properties of numbers. The results showed that, first, the surveyed students had a problem with thinking logically compared to high school students. Second, students who seemed to think logically were not able to use propositions properly. Third, even when students were able to understand specific examples, they could not understand the universal proposition and the examples in an integrated manner or the structure of these propositions.

1. はじめに

古来より数学を学ぶ意義として、「論理的思考力」や「批判的思考力」といった思考力の育成が掲げられており、現代でもその意味は変わっていない。我が国でも知識基盤社会に求められる必要な資質や能力を展望するものとして「21世紀型能力」が提案され、その中核として「思考力」（問題解決・発見力・創造力、論理的・批判的思考力、メタ認知・適応的学習力）が位置づけられている（国立教育政策研究所、2013）。

このような教科横断的な能力としての論理的思考力は各教科において領域固有の知識として学習される。そして、領域固有の思考力から領域普遍の思考力へ転換される。そのためには、様々な場面において思考力を働かせ、思考力そのものをより豊かなものにしていくことが重要になる。特に、数学は日常や社会的な問題を解決するための一つの方法になるため、様々な場面で数学を活用して問題を解決するためのスキルとして数学における論理的思考が重要になる。

数学における論理的思考の育成に関して、これまでに様々な調査が実施されている。従来の調査研究では、条件推理や推移律といった推論の型に関することが主に論理的思考の内容として調査されてきた（松尾他、1977；藤本、1995）。しかし、近年実施された大規模調査では推論の型そのものよりも、具体的な文脈における論理的な思考の側面に焦点が当てられている。「大学生数学基本調査」では、大学新入生の数学的素養と論理力の実態を把握することを目的に、「論理的な文章の理解」、「論理的な説明」、「概念から構成される数学イメージの言語化」、「数量スキル」、「具体的な場面における活用」に関する内容について実態調査が行われた（日本数学会教育委員会、2013）。また、「特定の課題に関する調査（論理的な思考）」では、高等学校生徒の論理的に思考する力の育成状況を把握することを目的に、論理的思考に必要と考えられる活動について「一般的な表現形式」および「数学的な表現形式」の2種類の問題を用いた調査が

行われた（国立教育政策研究所教育課程研究センター、2013）。これらの調査で明らかになった論理的思考は、あくまで論理的思考の一側面であり、論理的思考の全体を把握しているものではない。

論理的思考には、正しく推論することの他に、推論の前提となっている命題の意味を捉える行為も含まれる。このような命題解釈を学習者がどのように行っているか捉えることで、推論の型によらない論理的思考を捉えることができる。さらに、様々な文脈における命題解釈の特徴を明らかにすることで、これまでの調査で明らかにされてきた論理的思考の実態を命題解釈の観点から明らかにすることができる。

本研究では、これまで実施された大規模調査の結果を基に、命題解釈に着目して論理的思考の特徴を捉えることを目的とする。そのために、大学生を対象に、大規模調査で出題された問題を用いて質問紙調査およびインタビュー調査を実施する。そして、解答結果および解答過程における命題解釈の分析を通して大学生の論理的思考の実態を捉える。

2. 大学生の論理的に思考する力の実態

（１） 質問紙調査の目的と方法

本調査の目的は、大規模調査の結果と比較することで、大学生の論理的思考の実態を把握することである。そのために、2016年から2018年までの大学初年次生（国際学部、計58名）を対象に「特定の課題に関する調査（論理的な思考）」（以下、'12年調査）の調査問題を用いて実態調査を行った。'12年調査では、論理的な思考に必要と考えられる活動として6つの活動（表1）が定められており、これらの活動を基に調査問題が作成され、表現形式により一般的な表現形式による問題と数学的な表現形式による問題に分けられている。本調査では、これらの問題の中から数学的な表現形式に着目して問題を選出した。特に、数の性質を探究する文脈における問題である3問を本調査で取り上げた。

表 2 論理的な思考の活動

活動	具体的な内容
①規則、定義、条件等を理解し適用する。	資料から読み取ることができる規則や定義等を理解し、それを具体的に適用する。
②必要な情報を抽出し、分析する。	多く資料や条件から推論に必要な情報を抽出し、それに基づいて分析する。
③趣旨や主張を把握し、評価する。	資料は、全体としてどのような内容を述べているのかを的確にとらえ、それについて評価する。
④事象の関係性について洞察する。	資料に提示されている事象が、論理的にどのような関係にあるのかを見極める。
⑤仮説を立て、検証する。	前提となる資料から仮説を立て、他の資料などを用いて仮説を検証する。
⑥議論や論証の構造を判断する。	議論や論争の論点・争点について、前提となる暗黙の了解や根拠、また、推論の構造などを明らかにするとともに、その適否を判断する。

(出所) 国立教育政策研究所教育課程研究センター、2013、p. 15。

本調査で用いた調査問題は以下の3問である。1問目は、「三段論法」の問題である(図1)。この問題は、'12年調査では一般的な表現形式に分類される問題の一部であるが、推論を構成する命題は数学的な内容に関する命題であるため、本調査では数学的な表現形式の問題として取り上げた。論理的な思考の活動の分類では「④事象の関係性について洞察する」に該当し、三段論法に関する推論が誤っている理由を説明することが問われている。2問目は、「カレンダーの数の性質」の問題である(図2)。この問題は、論理的な思考の活動「①規則、定義、条件等を理解し適用する」に該当し、カレンダーの中で横並びの3つの数の和の性質を説明する文字式で、他の並び方の性質についても説明できるかの判断が問われている。3問目は、「連続する整数の性質」の問題である(図3)。この問題は、論理的な思考の活動「⑥議論や論証の構造を判断する」に該当し、連続する3つの整数の和について予想した性質について、正しいことを証明するために具体例を挙げることの妥当性とその理由および正しくないことを証明するために反例を挙げることの妥当性とその理由が問われている。どの問題もある特定の判断や説明が論理的に正しいかどうか判断する問題である。

次の推論は正しくない。なぜ、正しくないと言えるか、その理由を答えなさい。

3 の倍数は 2 つ加えて得られる数は 3 の倍数である。

a と b はいずれも 3 の倍数ではない。

ゆえに、 a と b を加えて得られる数が 3 の倍数ではない。

図 1 「三段論法」の問題

次の文を読み、後の問いに答えなさい。

右の図は、ある月のカレンダーである。幸子さん
は、カレンダーの中に示した枠のような、横に並ん
だ 3 つの数の和は、いつでも真ん中の数の 3 倍にな
ることについて、ノートに次のように書いた。

真ん中の数を x とし、 m を整数とすると、

$$(x-m) + x + (x+m) = 3x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

次のそれぞれの文章は、 $\textcircled{1}$ の式で説明できるか。説明できる場合には説明
できるに○を、説明できない場合には説明できないに○を付けなさい。

月	火	水	木	金	土	日
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

(1)	右の枠のような、 縦に並んだ3つの 数の和は、いつで も真ん中の数の3 倍になる。	<table border="1"><tr><td>月</td><td>火</td><td>水</td><td>木</td><td>金</td><td>土</td><td>日</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr><tr><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr><tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr></table>	月	火	水	木	金	土	日					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1) 説明できる 2) 説明できない
月	火	水	木	金	土	日																																							
				1	2	3																																							
4	5	6	7	8	9	10																																							
11	12	13	14	15	16	17																																							
18	19	20	21	22	23	24																																							
25	26	27	28	29	30	31																																							
(2)	右の枠のような、 斜めに並んだ3つ の数の和は、いつ でも真ん中の数の 3倍になる。	<table border="1"><tr><td>月</td><td>火</td><td>水</td><td>木</td><td>金</td><td>土</td><td>日</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr><tr><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr><tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr></table>	月	火	水	木	金	土	日					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1) 説明できる 2) 説明できない
月	火	水	木	金	土	日																																							
				1	2	3																																							
4	5	6	7	8	9	10																																							
11	12	13	14	15	16	17																																							
18	19	20	21	22	23	24																																							
25	26	27	28	29	30	31																																							
(3)	右の枠のような、 横に並んだ5つの 数の和は、いつで も真ん中の数の5 倍になる。	<table border="1"><tr><td>月</td><td>火</td><td>水</td><td>木</td><td>金</td><td>土</td><td>日</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td></tr><tr><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td></tr><tr><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr></table>	月	火	水	木	金	土	日					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1) 説明できる 2) 説明できない
月	火	水	木	金	土	日																																							
				1	2	3																																							
4	5	6	7	8	9	10																																							
11	12	13	14	15	16	17																																							
18	19	20	21	22	23	24																																							
25	26	27	28	29	30	31																																							

図 2 「カレンダーの数の性質」の問題

3つの連続した正の整数について、後の問いに答えなさい。

問1 博之さんは、3つの連続した整数について、次の性質が成り立つと予想した。

「大きい数と小さい数のそれぞれの平方の差は、いつでも中央の数の4倍である。」・・・①

そして、①が成り立つことを、次のように説明した。

博之さんの説明

1, 2, 3の場合、 $3^2 - 1^2 = 8 = 2 \times 4$ だから、中央の数2の4倍
5, 6, 7の場合、 $7^2 - 5^2 = 24 = 6 \times 4$ だから、中央の数6の4倍
9, 10, 11の場合、 $11^2 - 9^2 = 40 = 10 \times 4$ だから、中央の数10の4倍
したがって、いつでも中央の数の4倍である。

この説明は、①が成り立つことの証明として十分か。十分または不十分のどちらかに○を付け、そう考えた理由を書きなさい。

問2 博之さんは、さらに次の性質が成り立つと予想した。

「大きい数と小さい数のそれぞれの平方の差は、いつでも8の倍数である。」
・・・②

これに対して、圭子さんは、②が成り立たないことを、次のように説明した。

圭子さんの説明

2, 3, 4の場合、 $4^2 - 2^2 = 12$ これは8の倍数ではない。

この説明は、②が成り立たないことの証明として十分か。十分または不十分のどちらかに○を付け、そう考えた理由を書きなさい。

図3 「連続する整数の性質」の問題

(2) 調査の結果

① 「三段論法」の問題

調査結果を'12年調査で用いられた解答類型を基に分類した結果を表2に示す。正答(◎)と準正答(○)を合計した通過率は50.0%となる('12年調査の結果は56.0%)。対象学年や調査人数の違いはあるものの'12年調査と比較しても同じような傾向が見られる。

② 「カレンダーの数の性質」の問題

調査結果を、同様に解答類型を基に分類した結果を表3に示す。通過

表2 「三段論法」の解答類型

類型 番号	解答類型	反応率(%) 括弧内は '12年調査の結果
1◎	「 $a=2$, $b=1$ とすると, a と b を加えて得られる数は3の倍数となるから」など, 推論に反する具体的な数値を例示して解答しているもの。	36.2(40.3)
2◎	「前提『3の倍数を2つ加えて得られる数は3の倍数である』は, 『3の倍数ではない数を2つ加えて得られる数は3の倍数ではない』ことを述べているわけではないから」など, 推論が成立するには不備があることを取り上げて解答しているもの。	3.4(1.7)
3○	「 a と b は3の倍数でなくても, a と b を加えて3の倍数になりうるから」。	10.3(14.0)
4	「前提その1と前提その2とに関連性がないから」など, 前提の関係を的確に理解できないまま解答しているもの。	0.0(3.1)
5	「 a と b の数字が具体的に書かれていないから」など, 推論そのものを的確に理解できないまま解答しているもの。	0.0(3.4)
6	「前提1『3の倍数を2つ加えて得られる数は3の倍数であるから』」など, 前提1のみを理由としているもの。	1.7(1.8)
7	「前提2『 a と b はいずれも3の倍数ではないから』」など, 前提2のみを理由としているもの。	1.7(6.5)
8	「3の倍数を2つ加えても3の倍数にならないから」など, 数学的誤謬を含むもの。	5.2(3.0)
9	上記以外の解答。	24.1(10.3)
0	無解答。	17.2(15.9)

表3 「カレンダーの数の性質」の解答類型

類型 番号	解答類型	反応率(%) 括弧内は '12年調査の結果
1	1, 1, 1と解答しているもの(1:説明できる, 2:説明できない)。	11.1(27.2)
2◎	1, 1, 2と解答しているもの。	26.7(36.9)
3	1, 2, 1と解答しているもの。	11.1(14.2)
4	1, 2, 2と解答しているもの。	11.1(6.3)
5	2, 1, 1と解答しているもの。	6.7(4.0)
6	2, 1, 2と解答しているもの。	4.4(2.9)
7	2, 2, 1と解答しているもの。	8.9(4.4)
8	2, 2, 2と解答しているもの。	13.3(2.9)
9	上記以外の解答。	0.0(0.2)
0	無解答。	6.7(1.1)

表4 「連続する整数の性質」(問1) の解答類型

類型 番号	解答類型	反応率(%) 括弧内は '12年調査の結果
1◎	(不十分) に○を付け、正しく理由を述べているもの。	10.3(24.2)
2○	(不十分) に○を付けているが、他の一部の場合について示されていないことを指摘している、または、他の場合について成り立たない可能性があることを指摘しているもの。	8.6(4.0)
3	(不十分) に○を付けているが、理由が間違っているもの。	10.3(16.5)
4	(不十分) に○を付けているが、理由が記述されていないもの。	3.4(2.9)
5	(十分) に○を付けているもの。	53.4(45.8)
9	上記以外の解答。	0.0(0.3)
0	無解答。	13.8(6.3)

表5 「連続する整数の性質」(問2) の解答類型

類型 番号	解答類型	反応率(%) 括弧内は '12年調査の結果
1◎	(十分) に○を付け、正しく理由を述べているもの。	8.6(33.7)
2○	(十分) に○を付け、式を使ったりして4の倍数になるが8の倍数にならないことを述べているもの。	6.9(1.4)
3	(十分) に○を付けているが、理由が正しく表現されていないもの。	10.3(17.4)
4	(十分) に○を付けているが、理由が記述されていないもの。	12.1(6.6)
5	(不十分) に○を付けているもの。	39.7(33.5)
9	上記以外の解答。	3.4(0.2)
0	無解答。	19.0(7.2)

率は26.7%である（'12年調査の結果は36.9%）。'12年調査の結果と比較しても通過率は10ポイント以上の差があり、調査対象である大学生の苦手分野が浮き彫りになっている。

③ 「連続する整数の性質」の問題

調査結果を、同様に解答類型を基に分類した結果を表4および表5に示す。問1の通過率は19.0%である（'12年調査の結果は28.2%）。問2の通過率は15.5%である（'12年調査の結果は35.1%）。'12年調査の結果と比較すると、問1、問2共に正答の割合が低く、具体例を挙げて説明することの妥当性

の判断に関して課題があると言える。特に、問2に関して反例を挙げて説明することの妥当性の判断に課題がある。

3. インタビュー調査に基づく命題解釈の分析

(1) インタビュー調査の目的と方法

本調査は、質問紙調査で明らかになった課題について、解決過程における学習者の命題解釈に着目することで論理的思考の実態を把握することを目的とする。そのために、2017年の調査協力者を対象にインタビュー調査を実施した。本インタビューでは、質問紙調査の結果を振り返りながら解決過程における命題解釈を捉えるために、半構造化インタビューの手法を採用した。質問紙調査で解答した結果についての説明を基に、誤答の場合は正答まで導くための質問を、正答の場合は問題の発展に関する質問を用意した。インタビューの際は、被験者の質問紙調査の解答用紙および白紙の計算用紙と筆記具を用意し、必要であれば紙に書いて説明するよう促した。

(2) 命題解釈の分析方法

本研究では、本橋(2002)による「命題の解釈」を基に構築された枠組み(大塚、2008)を用いて、質問紙およびインタビュー調査の結果を分析する。

本橋(2002)は、従来の論理学において具体的な場面から形式を抜き出す行為を考慮する視点が欠如していることを指摘し、その行為を表現するために「命題の解釈」という概念を用いている。「命題の解釈」とは、ある命題に対して「『主題』が『条件』を満たす」と捉える行為である。例えば「6の倍数は偶数である」という命題は、「主題“6”が条件“ x の倍数は偶数である”を満たす」(x の変域は自然数)と捉えることもできるし、「主題“6の倍数”が条件“ x は偶数である”を満たす」(x の変域は自

然数の部分集合全体)と捉えることもできる。

さらに、「視点」の違いによって、同じ解釈でも“6”が自然数なのか整数なのか区別することができる。「視点」は、「視点の世界」と、その世界における定数、関数、関係からなる「構造」から構成される。このような「視点」における「命題の解釈」を次のように記述する。

【解釈 a 】「6の倍数は偶数である」

- ・視点 $\langle N; 6, x \text{ は } y \text{ の倍数である}, z \text{ は偶数である} \rangle$
- ・自然数“6”が条件「 x の倍数は偶数である (x の変域は N)」を満たす。

解釈 a は、「視点の世界」として自然数全体“ N ”を取り、自然数上の定数“6”と、自然数上の2変数関係“ x は y の倍数である”と1変数関係“ x は偶数である”という「構造」を持つ「視点」の下で“6”を主題として解釈された「命題の解釈」である。

大塚(2008)は、このような「命題の解釈」概念を基に、学習者の命題解釈を「個人の置かれた文脈」において評価するための枠組みを提案している。「個人の置かれた文脈」とは、命題解釈を行う際に学習者が持つ目的意識のことであり、「命題を理解しようとする文脈」(以下、「理解」の文脈)、「命題を証明しようとする文脈」(以下、「証明」の文脈)、「命題を活用しようとする文脈」(以下、「活用」の文脈)という3種の文脈が定められている。「理解」の文脈では、命題を構成する様々な要素に着目して命題を理解しようとする命題解釈が評価される。また、「証明」の文脈では、命題を構成する条件に着目して命題の構造を明らかにしようとする命題解釈が評価される。そして、「活用」の文脈では、ある命題から新しい命題を得るための適切な「視点」での命題解釈が評価される。

(3) 分析結果

① 「三段論法」に関する事例の分析

学生Aは、「三段論法」の問題の解答類型では「無解答」に分類されており、質問紙調査の結果からはどのように問題を捉えていたか把握でき

ない。しかし、同調査における他の三段論法（前件肯定・後件否定）に関する問題は正答しており、推論の妥当性についてある程度理解していると判断できる。そのため、学生Aを対象としたインタビュー調査を実施することで、学生Aが本問題にどのように取り組んだのか把握し、その解決過程における命題解釈を分析することにした。

インタビューでは、最初に無解答の理由を確認したところ、学生Aから「深く考えていなかった」という反応が得られた。そのため、インタビュアーが今考えてみるとどうなるか促してみると、少し考えた後に「これあっているんじゃないですか」と反応した。インタビュアーがどのように考えたのか確認すると、学生Aは「(3の倍数に) なりそうな気がする」、「足して3の倍数になればいいということですね。2と4とか、後はとにかくそういうのがいっぱいある」のように、当初の考えを変更して推論が正しくないことを例を挙げて説明した。こうした経緯を踏まえてインタビュアーが改めて推論が正しくない理由の説明を求めると、学生Aは「これの意図ってそんなにわかんないんだよね」と悩んでしまった。学生Aが「 a と b がなんだかわからないということですか」と述べたことを受けて、インタビュアーは具体的に考えてみることを促した。

I：正しくないっていうのは？

SA： a が例えば4とか b が2とか、 a が8で b が4とかだったら a と b を加えて得られる数は3の倍数になることもあります。

I：だから正しくないという説明ができるんだね。

SA：そういう問題だったんだ。意味わかんないから。そういうことなんだね。

I：なんだと思っていたの？

SA：見た感じ、正しくない理由を答えなさい、 a と b なんて形によって変わるじゃんって思ってたからさ。

I：確かにそうだね。

SA： a と b の中身がわかればいいけど、わかんないんだったらこんなこと言えないよね。だからいいやって。

I：だから正しくなるときもあるし、正しくないときもあるということね。

図4 インタビュー記録（学生A）

その結果、学生Aは $a = 4$ 、 $b = 1$ のときは正しくなり、 $a = 4$ 、 $b = 2$ のときは正しくないことを確認した。その上で、学生Aは問題を十分に理解していなかった旨を主張し、 a と b の値によって推論の正しさが変わると思っていたことを述べた (図4)。

インタビュー結果からわかるように、質問紙調査の時点で学生Aは a と b の値によって推論の正しさが変わると考えていた。つまり、推論の正しさを1つに決められないため、「無解答」になったと考えられる。学生Aがこのように考えた背景には、本問題で問われている推論の正しさではなく、三段論法の結論に当たる「 a と b を加えて得られる数は3の倍数ではない」という命題の真偽を判断していると想定できる。その際の命題解釈を以下に示す。

【解釈A】「 a と b を加えて得られる数は3の倍数ではない」

- ・視点 $\langle Z, Z^{-3}; a, b, +, 3 \text{の倍数ではない} \rangle$
- ・3の倍数でない整数“ a ”と“ b ”が条件「 $x + y$ は3の倍数ではない (x, y の変域は Z^{-3})」を満たす。

解釈Aは、「視点の世界」として整数全体“ Z ”および3の倍数以外の整数“ Z^{-3} ”を取り、 Z^{-3} 上の定数“ a ”と“ b ”、 Z 上の2変数関数“ $+$ ”、 Z 上の1変数関係“3の倍数ではない”という「構造」を持つ「視点」の下で、“ a ”と“ b ”を主題とした解釈である。この解釈Aによって得られる条件「 $x + y$ は3の倍数ではない (x, y の変域は Z^{-3})」の変数 x, y に任意の数を代入すると命題の真偽が定まる。つまり、具体的に値の定まっていない定数“ a ”と“ b ”に代わって具体的な数を考えることで、命題の真偽を判断することになる。すると、三段論法の前提を踏まえているにも関わらず、結論の真偽を判断してしまうことで、推論の妥当性は評価できなくなってしまう。

「個人の置かれた文脈」において解釈Aを評価すると、「理解」の文脈における命題解釈として適切な解釈であるといえる。しかし、推論の正しさを判断するためには、命題を構成する条件に着目した解釈が重要と

なる。そのため、「証明」の文脈において「3の倍数でない2つの数の和は3の倍数でない」という命題の構造を明らかにする命題解釈を基に、推論の正しさを判断することが求められる。実際には、Z上の1変数関係“ x は3の倍数ではない”という主題が条件「 $P(x)$ かつ $P(y)$ ならば $P(x+y)$ 」を満たすという命題解釈になる。このとき、 x と y は自由変数ではなく、束縛変数として解釈されているので、適当な値を代入して考えるのではなく、任意の数に対してこの命題が成り立つように考える必要がある。

② 「カレンダーの数の性質」に関する事例の分析

’12年調査における本問題の誤答として最も多い解答は(3)のみ間違えた解答類型1（反応率27.2%）である。本調査においても誤答の中では上位にあり、ある程度の反応率（11.1%）がある。’12年調査の結果では、「(3)の間違いは、問題文の『次のそれぞれの文章は①の式で説明できるか。』の意図を誤って読み取ったものと思われる」（国立教育政策研究所教育課程研究センター、2013、p. 50）と分析されているように、問題文を正確に理解していないことが原因で誤答になったと考えられる。以上のことから、本問題の解答が解答類型1に分類された学生Bを対象としたインタビュー調査を実施し、学生Bの解決過程およびその過程における命題解釈を分析することにした。

インタビューでは、すべて「説明できる」とした理由を確認したところ、学生Bから「どれも真ん中の数の3倍になっているから」という反応があった。インタビュアーがそれぞれどのように考えたか確認すると、学生Bはそれぞれの場合について問題文で四角で囲まれた数を用いて先述の主張を説明した。その説明を確認した後で、インタビュアーは問題の趣旨を再度説明し、それぞれの事柄が正しいかどうかではなく、①の式で説明できるかどうかという意味であることを確認した。すると、すぐに学生Bは(3)について「できない」と反応した。理由と尋ねると、「これ（(1)と(2)）は3倍、3倍だから $3x$ で3倍ということになるけど、これ（(3)）は5倍だから違うかな」と説明した。この説明を受けて、イン

$$\begin{aligned}(21 - m) + 21 + (21 + m) &= 63 \\ (14 - m) + 14 + (14 + m) &= 42 \\ (21 - m) + 21 + (21 + m) &= 315\end{aligned}$$

図5 インタビューにおける記述 (学生B)

タビュアーは、①の式を使って実際にどのように説明できるのか、特に整数 m はどうなるのか尋ねた。学生Bは、「そこは見えていない」と反応し、説明できるかどうかは①の $3x$ の部分で判断し、(3)については $5x$ だから説明できないと判断したと説明した。インタビュアーが改めてそれぞれについてどのように式で説明できるか尋ねると、学生Bは図5の式を書いた。学生Bは、インタビュアーとの対話の中で(3)の場合の式を修正しながら説明を試みたが、最後まで正しい式を用いて説明することはできなかった。

学生Bは、インタビューの中で正答を導き出しているが、その説明は最終的に不十分なままであった。その要因として考えられることは、学生Bは①の式を十分理解していないという実態である。本問題において①の式は、「横に並んだ3つの数の和は、いつでも真ん中の数の3倍になる」ことを示すだけでなく、同じ構造を持つ(1)～(3)の各場面において活用できるかどうか問われている。しかし、学生Bは(3)の場面の説明が十分にできず、①の式を適切に活用できていないといえない。つまり、学生Bは①の式の命題解釈が原因で(3)の場面に①の式を活用できなかったと考えられる。その原因と想定される命題解釈を以下に示す。

【解釈B】「 $(a - m) + a + (a + m) = 3a$ 」

・視点 $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}^{\mathbf{C}} ; a, 3, m, +, -, \times, = \rangle$

・真ん中の数“ a ”が条件「 $(x - m) + x + (x + m) = 3x$ (x の変域は $\mathbf{N}^{\mathbf{C}}$)」を満たす。

解釈Bは、「視点の世界」として自然数全体“ N ”と枠で囲まれた真ん中の数全体“ N^c ”を取り、 N^c 上の定数“ a ”、 N 上の定数“ 3 ”と“ m ”、 N 上の関数“ $+$ ”、“ $-$ ”、“ \times ”、 N 上の関係“ $=$ ”という「構造」を持つ「視点」の下で、“ a ”を主題とした解釈である。解釈Bによって得られる条件「 $(x - m) + x + (x + m) = 3x$ (x の変域は N^c)」に、枠で囲まれた真ん中の数から21や14を代入することで、学生Bが記述した式(図5における1・2行目)が得られる。しかし、解釈Bに基づいて(3)の場面を説明しようとしても、そのままでは説明できないため、無理に説明しようとした結果、学生Bの記述(図5における3行目)のように不適切な式になってしまう。

解釈Bそのものは「理解」の文脈における命題解釈として問題があるわけではない。「理解」の文脈では、命題を構成する様々な要素を主題とする命題解釈が評価されるため、他にも様々な要素を主題とする命題解釈が必要になる。例えば、学生Bのように整数“ m ”を無視するのではなく、整数“ m ”を主題として解釈することで、整数“ m ”と枠の囲み方の関係に気付くこともできる。このような「理解」の文脈における命題解釈の偏りは「理解」の文脈のままでは顕在化しないこともある。今回の事例のように、「活用」の文脈で解釈Bに基づいて説明のための式を導こうとすることで、「理解」の文脈における命題解釈の偏りが顕在化することがある。

③ 「連続する整数の性質」に関する事例の分析

インタビュー調査の対象となった学生Cは、本問題の間1で「不十分」を選択し、「4, 5, 6は証明できない」と理由を説明している。また、間2では、「不十分」を選択し、「1, 2, 3で証明ならず」と理由を説明している。間1の理由の記述は計算間違いだと思われるが、反例を挙げて証明が不十分であることの説明している。一方、間2では、反例を用いた証明に対して、成り立つ例を1つ挙げて証明が不十分であることの説明をしている。このような反例の用い方をしている学生Cに対してインタビュー調査を実施することで、反例を用いた証明における学生Cの命題

解釈を分析することにした。

インタビュアーは、最初に問1の解答について学生Cに説明を求めた。学生Cは「計算ミスしたんですね」と述べ、計算し直した後に「十分の勘違い」と解答を修正した。次に、問2の解答について説明を求めたところ、「1つ例題を出して8の倍数になったから成り立たないと思った」と解答の説明をしたが、「1つだけの例じゃ不十分」として現在は誤った解答であると思っていることを主張した。インタビュアーが問1と問2どちらも成り立たない例を挙げていることを確認すると、学生Cは、問2に関していつでも8の倍数になるわけではないことを説明した(図6)。その上で、問2の解答について学生Cは「どっちかって言ったら十分でいいと思う」と自身の解答を修正した。問1については、インタビュアーとの対話の中で「どんな数でもそうなるか」という質問に対し、「なぜこうなるか理由も含めて規則性を書けばいい。 x とか y とか使って」と答え、文字を使って一般的に説明する必要があることを説明した。

問2について、学生Cは当初、具体例を根拠にして帰納的に命題②の真偽を考えようとしていたが、それでは不十分だと判断している。しかし、インタビューの中で、命題②の「いつでも」という用語に着目し、1つの具体例でも命題②が成り立たないことを示せるという考えに至った。それと同時に、命題②が成り立たないことの意味を「8の倍数になるとき

- I : これが成り立たないことの説明としてこうやってやってくれたんだ。

Sc : はい、じゃあ、理由としては「いつでも」を消せばよかったんですよね。「いつでも」でないという感じでやればよかったんですね。絶対ではないみたいな。8の倍数に絶対なるわけではないみたいな。だから、十分と不十分の間なんですかね。どっちもどっちじゃないですか。8の倍数なるときもあるし、8の倍数にならないときもあるって。だから間かなくて。

I : なるほど。だから、1, 2, 3のときは8の倍数になるし、2, 3, 4のときは8の倍数にならないと。そう考えると、「いつでも」というのはちょっと違う。

Sc : はい。

図6 インタビュー記録(学生C)

もあるし、8の倍数にならないときもある」と捉えている。そのため、証明の妥当性については、「十分と不十分の間」と判断しており、理解は十分であるとはいえない。このような考えに至った背景には、以下の2つの命題解釈が判断に影響を与えたと考えられる。

【解釈 C₁】「大きい数と小さい数のそれぞれの平方の差は、いつでも8の倍数である」

- ・視点 $\langle \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^{3C}; (a, b, c), f, 8 \text{ の倍数} \rangle$
- ・連続する3つの整数“(a, b, c)”が条件「 $f(x, y, z)$ は8の倍数である((x, y, z) の変域は \mathbb{Z}^{3C})」を満たす。

【解釈 C₂】「大きい数と小さい数のそれぞれの平方の差は、いつでも8の倍数である」

- ・視点 $\langle \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^{3C}, \mathbb{Z}^{\#}; f, 8 \text{ の倍数} \rangle$
- ・関係“8の倍数”が条件「 $\forall (x, y, z) P(f(x, y, z))$ 」(P の変域は $\mathbb{Z}^{\#}$ 、 (x, y, z) の変域は \mathbb{Z}^{3C})」を満たす。

解釈 C₁ は、「視点の世界」として整数全体“ \mathbb{Z} ”、連続する3つの整数の組全体“ \mathbb{Z}^{3C} ”を取り、 \mathbb{Z}^{3C} 上の定数“(a, b, c)”、 \mathbb{Z}^{3C} から \mathbb{Z} への関数“ $f(x, y, z) = z^2 - x^2$ ”、 \mathbb{Z} 上の1変数関係“ x は8の倍数である”という「構造」を持つ「視点」の下で、“(a, b, c)”を主題とした解釈である。解釈 C₁によって得られる条件「 $f(x, y, z)$ は8の倍数である((x, y, z) の変域は \mathbb{Z}^{3C})」は、連続する3つの整数にある操作をして得られる数が8の倍数になるかどうか判別する機能を持つ。つまり、学生 C は、解釈 C₁に基づいて具体例が条件を満たすかどうか判断し、命題②の真偽を確かめていたと考えられる。

一方、解釈 C₂ は、「視点の世界」に整数の部分集合全体“ $\mathbb{Z}^{\#}$ ”を加え、関係“ x は8の倍数である”を主題とした解釈である。解釈 C₂によって得られる条件「 $\forall (x, y, z) P(f(x, y, z))$ 」(P の変域は $\mathbb{Z}^{\#}$ 、 (x, y, z) の変域は \mathbb{Z}^{3C})」は、すべての連続する3つの整数にある操作をして得られる数がど

のような性質を満たすか判断する機能を持つ。つまり、学生Cは、解釈C₂に基づいて連続する3つの整数の性質として「いつでも」成り立つものを判断したと考えられる。

学生Cは、解釈C₁と解釈C₂という2つの命題解釈に基づいて命題②の真偽判断をしている。しかし、このことが証明の妥当性について「十分と不十分の間」という中途半端な判断に結びついている。解釈C₁に基づいた判断では、「連続する3つの数にある操作をして得られる数が『8の倍数』または『8の倍数ではない』を満たす」という情報を得られるのに対し、解釈C₂に基づいた判断では、「すべての連続する3つの数にある操作をして得られる数は『8の倍数』および『8の倍数ではない』を満たさない」という情報が得られてしまう。一見、矛盾するような情報であるため、学生Cは最終的な判断に迷いが出たものと思われる。

「個人の置かれた文脈」において解釈C₁および解釈C₂を評価すると、解釈C₁は「理解」の文脈、解釈C₂は「証明」の文脈における命題解釈として評価できる。本問題は証明の妥当性を判断する問題であるため、「証明」の文脈において評価される命題解釈が重要となる。学生Cは当初、解釈C₂のような命題解釈をしていなかったと思われる。解釈C₁のように、「理解」の文脈において問題に関する情報を得ようとしたと考えられる。その後、インタビューの途中で解釈C₂のような命題解釈ができたことから、命題②が成り立たないことを導くことができた想定される。

4. 議 論

本調査の分析結果から、大学生の論理的思考の現状と課題について、以下の3点を導くことができる。

第一に、本調査の対象となった大学生は、高校生と比較しても論理的に思考することに課題がある。調査対象者は国際学部の大学初年次生であり、高等学校の課程は修了している。しかし、すべての調査問題において通過率が'12年調査の結果を下回っており、対象となった大学生の論

理的に考える力は、高校生と比較しても十分であるとはいえない。特に、証明の妥当性に関する問題（「連続する整数の性質」の問題）の通過率は20%を下回っており、多くの大学生は数学的な証明が正しいかどうか論理的に判断することができないという現状がある。帰納的に推論することで十分だと考えていたり、反例の意味を理解していなかったりという実態は先行研究でも指摘されている（e.g., Balacheff, 1991; Durand-Guerrier, 2008; Hoyles & Küchemann, 2003; Zaslavsky & Ron, 1998）。このような実態から、数学の学習を通して具体例の役割を指導していくことが重要となる。

第二に、論理的に思考しているように思える学生でも、命題を適切に活用できない場合がある。ある命題を活用して新たな命題を導く場面では、前提となる命題をどのように理解しているかということが重要になる。しかし、命題を理解する段階では、偏った命題の理解をしていても、それが顕在化しないことがある。本調査における命題の理解および適用に関する問題（「カレンダーの数の性質」の問題）では、活用する場面の事例がある条件（真ん中の数の3倍になる）を満たすかどうか判断するだけで問題に答えられてしまう。つまり、元の命題を十分に理解していなくても論理的に考えていると評価されることがある。したがって、論理的に考える力を評価するためには、活用したり発展的に考えたりする場面において学習者がどのように理解しているか確認することが重要となる。

第三に、具体例の理解はできていても、それらを統合的に理解することや全体の構造を把握することに課題がある。先述のとおり、証明の妥当性の判断に関して課題がある。全称命題が成り立つことを証明しようとした場合、個別の具体例ではなく、一般的にその命題が成り立つことを示す必要がある。いくつかの具体例を基に一般的に成り立つことを示す、つまり、帰納的に推論するだけでは証明として不十分である。また、全称命題が成り立たないことを証明するためには、反例を1つ挙げれば十分である。しかし、本調査の事例のように、この知識があっても反例が1つでは不十分であると考えてしまうことがある。このような課題の

要因の1つとして、全称命題とその具体例を統合的に理解していないことが考えられる。具体例を基に狭い範囲で一般化したり、反例があっても無視したりしてしまうことは、これが原因と考えられる（大塚、2013）。このような実態を踏まえると、数学において論理的に考えるためには、一般としての全称命題と特殊としての具体例の関係を適切に理解し、命題の構造を捉えることが重要となる。

5. まとめと今後の課題

本研究では、大学生の論理的思考の実態を捉えるために、大規模調査で出題された問題を用いて質問紙調査およびインタビュー調査を実施し、解答結果および解答過程における命題解釈を分析した。その結果、以下の3点を導いた。第一に、本調査の対象となった大学生は、高校生と比較しても論理的に思考することに課題がある。第二に、論理的に思考しているように思える学生でも、命題を適切に活用できない場合がある。第三に、具体例の理解はできていても、それらを統合的に理解することや全体の構造を把握することに課題がある。

本調査の対象は、特定学部の中の小集団であり、一般的に大学生の論理的思考の現状を示すにはデータが不足している。今後の課題は、より一般的に大学生の論理的思考の現状を把握するために、他学部・他学科の学生を対象とした調査を実施し、高大接続の観点から数学における論理的思考の実態を明らかにすることである。

〔付記〕 本研究はJSPS科研費JP16K17435の助成を受けたものである。

（参考文献）

- Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexities of a constructivist approach to mathematics learning. In V. E. Glaserfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 89–110. Kluwer Academic Press.
- Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof, *ZDM Mathematics Education*, 40, 373–384.

- Hoyles, C. & Küchemann, D. (2003) Students' understandings of logical implication, *Educational Studies in Mathematics*, 51, 193–223.
- 藤本義明 (1995). 「わが国における論理的思考の実態調査の成果と課題」『全国数学教育学会誌 数学教育学研究』, 1, 109–115.
- 国立教育政策研究所 (2013). 『平成 24 年度教育課程の編成に関する基礎的研究報告書 5 社会の変化に対応する資質や能力を育成する教育課程編成の基本原則』, <https://www.nier.go.jp/kaihatsu/pdf/Houkokusho-5.pdf> (2020 年 1 月 31 日参照).
- 国立教育政策研究所教育課程研究センター (2013). 『特定の課題に関する調査 (論理的思考) 調査結果: 21 世紀グローバル社会における論理的に思考する力の育成を目指して』, https://www.nier.go.jp/kaihatsu/tokutei_ronri/pdf/10_tyousakekka.pdf (2020 年 1 月 31 日参照).
- 松尾吉知・栗原幹夫・味八木徹・田島稔 (1977). 「日常論理の様相について」『日本数学教育学会誌, 数学教育学論究』, 31, 1–33.
- 本橋信義 (2002). 『数学と新しい論理: 数学的帰納法をめぐる』, 遊星社.
- 日本数学会教育委員会 (2013). 『第一回大学生数学基本調査報告書』, <https://mathsoc.jp/publication/tushin/1801/chousa-houkoku.pdf> (2020 年 1 月 31 日参照).
- 大塚慎太郎 (2008). 「学校数学における子どもの命題の解釈を捉える枠組みの構築」『筑波数学教育研究』, 27, 21–30.
- 大塚慎太郎 (2013). 「命題が偽であることの説明における困難性の要因の分析: 学習者による命題解釈に焦点を当てて」『日本数学教育学会誌 数学教育学論究』, 99, 3–17.
- Zaslavsky, O. & Ron, G. (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 225–232.