

# ニューケインジアンDSGEモデルによる GDPギャップの構造推定

八木直人

## 1 はじめに

GDPギャップは、経済政策の判断にあたって必要不可欠な指標であり、内閣府や日本銀行を始めとした国内各種機関をはじめ、IMFやOECDなどの国際機関が推計値を発表している。しかしながら、GDPギャップは直接観察できる変数ではなく、またGDPのように一定の手続きによって推計方法が定められているものでもないため、推計方法によってその推計値は異なったものとなる。本論文の目的は、動学的確率一般均衡（DSGE）モデルによる構造推計の手法を用いて、経済理論にもとづいたGDPギャップの推計を行い、その特性を分析することである。

GDPギャップは、観測されたGDPの潜在GDPからの乖離率と定義される。したがってGDPギャップの計測方法の違いは、潜在GDPの定義の違いであるといえる。かつての潜在GDPの定義では、最大概念を用いて「利用可能な生産要素を最大限に投入したときに実現可能なGDP」とすることが多かった。この場合、生産要素の賦存量や技術水準は短期的には変化しないため、潜在GDPも景気変動に影響を受けないものと考えられた。しかし現代のマクロ経済政策における経済安定化の主目的は、インフレやデフレの加速をもたらさない適正な成長経路への調整であり、潜在GDPを物価変動圧力からの中立性によって定義することが主流となっている。GDPギャップを公表している国内外各種機関においても、潜在GDPを「中長期的に持続可能なGDP水準」、あるいは「インフレを加速させないGDP水

準」と定義している。この場合、物価変動圧力から中立なGDPの水準は、景気変動の局面ごとに変化する可能性があり、GDPギャップもしくは潜在GDPの計測は、こうした特性を考慮して行われる必要がある。

潜在GDPを計測する簡易な方法として用いられるものに、フィルタリング・アプローチがある。これは、GDPの時系列をトレンド成分とサイクル成分に分解し、サイクル成分が取り除かれたトレンド成分を潜在GDPとみなすものであり、代表的なものとしてHPフィルターがある。この手法の利点は、経済学的な理論を前提とせず統計的な手法のみで計算できること、およびGDPの時系列データの1変数のみで簡易に計算できることであるが、背後の経済構造の変化などを捉えることはできず、また得られた系列がはたして上述の物価変動への中立性をみたまずGDP水準であるか定かではない。

国内外の各種機関が採用している潜在GDPの計測方法として、生産関数アプローチがある。この手法は、生産関数によって推計したマクロ経済の供給能力を潜在GDPとするものであり、内閣府、日本銀行、IMFはコブ＝ダグラス型生産関数を、OECDはCES型生産関数を用いている。生産要素による供給面の要因に分解が可能であり直感的に理解しやすい利点があるが、物価に関する情報は用いられておらず、これも中立性をみたまずGDP水準であるか定かではない。

こうした手法に対して、潜在GDPの中立性をマクロ経済学モデルの中で明確に定義した上で、経済モデルと整合的な推計を行うのがDSGEモデル（動学的確率一般均衡モデル）にもとづく構造推定の手法である。DSGEモデルでは、家計や企業および政策当局が、将来の経済状況を予測しながら合理的に意思決定を行う状況下で、一般均衡における動学経路においてGDPや物価などがどのように変動するかを分析することができる。近年のDSGEモデルでは、(1) 独占的競争モデルにもとづく不完全競争による価格の硬直性と、(2) 部分的な企業にしか価格改定のチャンスが訪れない

ことによる価格の粘着性という、二つの摩擦を取り込んだニューケインジアン型のDSGEモデルが広く用いられている。標準的なニューケインジアンDSGEモデルにもとづけば、実際のGDPとはこれら二つの摩擦をともに含んだ状態で観測されるGDPのことであり、反対に潜在GDPとは(1)市場が競争的であり、かつ(2)すべての企業が最適な価格を選択できるときに実現される、効率的なGDPのことであると定義することができる。これにより経済理論による意味付けをもったGDPギャップを計測することが可能になる。

標準的なニューケインジアン型DSGEモデルを用いてGDPギャップの構造推定を行ったものに、Justiniano and Primiceri (2008) およびHirose and Naganuma (2007) があるが、両者ともにアメリカ経済についての分析となっている<sup>1)2)</sup>。そこで本論文では、後者を修正したモデルを構築し、日本経済とアメリカ経済のGDPギャップを推計し、結果を比較することでDSGEモデルによるGDPギャップ推計の特性を分析する。

## 2 経済モデル

本節では、推定に用いる標準的なニューケインジアン型DSGEモデルを定式化する。ここでのモデルはHirose and Naganuma (2007) にもとづいているが、Hiroseらのモデルが定常状態からの乖離率によってモデルを記述しているのに対し、本論文ではトレンド経路からの乖離率の形に修正したモデルを用いる。

### 家計の行動

経済には無数の家計が存在し、代表的家計の選好が消費水準  $C_t$  と労働供給  $N_t$  の効用関数

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e^{d_t} \left[ \frac{(C_t/C_{t-1}^h)^{1-\mu}}{1-\mu} - \chi \frac{N_t^{1+\xi}}{1+\xi} \right] \quad (1)$$

によって表現されるとする<sup>3)4)</sup>。ここで  $d_t$  は  $t$  期の需要ショックを表し、 $\beta \in (0,1)$  は割引因子、 $\mu$  は消費の異時点間代替の弾力性、 $\xi$  は労働供給の異時点間代替の弾力性、 $h \in (0,1)$  は消費の習慣形成による消費の粘性を表すパラメータである。また  $\chi$  は定数、 $E_t$  は  $t$  期の情報に基づく期待値オペレータである。 $P_t$  を物価水準、 $B_t$  を名目債券需要、 $W_t$  を名目貨幣需要、 $W_t$  を名目賃金率、 $\Pi_t$  を名目利益、 $i_t$  を名目利率とすると、代表的家計の予算制約は

$$P_t C_t + M_t + B_t = W_t N_t + \Pi_t + M_{t-1} + (1 + i_{t-1}) B_{t-1} \quad (2)$$

と表せる。

家計は、予算制約 (2) 式を物価水準で割って実質で表した予算制約のもとで効用関数 (1) 式を最大化する。当該期のラグランジュ乗数を  $\Lambda_t$  とおくと、1階の条件は

$$\Lambda_t = E_t \left[ e^{d_t} C_t^{-\mu} C_{t-1}^{h(\mu-1)} - h\beta \left( e^{d_{t+1}} C_{t+1}^{1-\mu} C_t^{h(\mu-1)-1} \right) \right] \quad (3)$$

$$1 = E_t \left[ \beta \frac{\Lambda_{t+1}}{\Lambda_t} \cdot (1 + i_t) \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \quad (4)$$

$$\frac{e^{d_t} \chi N_t^\xi}{\Lambda_t} = \frac{W_t}{P_t} \quad (5)$$

となる。ここで (3) 式および (4) 式は家計の消費貯蓄選択における無裁定条件を意味し、家計は物価水準および利率を所与として無裁定条件にもとづく異時点間の消費水準を決定する。一方、(3) 式および (5) 式は消費財と余暇の最適選択による労働供給関数であり、家計は実質賃金を所与として最適な労働供給の水準を決定する。

## 企業の行動

企業には最終財企業と中間財企業の2種類が存在するとする<sup>5)</sup>。最終財企業は

$$Y_t = \left[ \int_0^1 Y_t(j) \frac{\theta_t - 1}{\theta_t} dj \right]^{\frac{\theta_t}{\theta_t - 1}} \quad (6)$$

で表されるCES型生産技術を持ち、最終財価格 $P_t$ と中間財価格 $P_t(j)$ を所与とする完全競争市場のもとで、最適な生産量と中間財需要を決定する。ここで $\theta_t$ は時間について可変的な中間財の需要の弾力性である。費用最小化問題を解くと、中間財需要関数および物価水準はそれぞれ

$$Y_t(j) = \left( \frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\theta_t} Y_t \quad (7)$$

$$P_t = \left[ \int_0^1 P_t(j)^{1-\theta_t} dj \right]^{\frac{1}{1-\theta_t}} \quad (8)$$

となる。

一方、中間財企業は労働投入量 $N_t^d$ の線形の生産関数

$$Y_t(j) = A_t N_t^d(j) \quad (9)$$

を持ち、生産性 $A_t$ はすべての企業に共通であるとする。中間財企業は、各財の需要曲線(7)式のもとで独占的に競争しており、労働は完全競争市場において供給されているものとする。限界費用を $MC_t$ とおき、実質賃金を所与として費用最小化問題を解くと、

$$MC_t = \frac{W_t}{P_t A_t} \quad (10)$$

が労働需要関数となる。

中間財企業の価格設定は、Calvo (1983) に従い以下のような手順で決まるとする。 $t$ 期において最適な価格に改定する機会を得るのは、中間財企業のうち $1 - \omega$ のみであるとし、残りの $\omega$ は価格を据え置く。したがって企業 $j$ はこの確率を考慮して、確率的割引率を $\beta^i (\Lambda_{t+i}^* / \Lambda_t^*)$ を用いた将

来利益の割引現在価値

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i \left( \frac{\Lambda_{t+i}^*}{\Lambda_t^*} \right) \left[ \left( \frac{P_t(j)}{P_{t+i}} \right) Y_{t+i}(j) - \Phi_{t+i} Y_{t+i}(j) \right]$$

を最大にするように価格  $P_t(j)$  を選択する。中間財市場の均衡条件  $Y_t(j) = C_t(j)$  のもとでの最適価格  $P_t^{opt}$  の 1 階の条件を求めると、

$$\frac{P_t^{opt}}{P_t} = Z_t \frac{E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i Q_{t,t+i} Y_{t+i} M C_{t+i} \left( \frac{P_{t+i}}{P_t} \right)^{\theta_t}}{E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i Q_{t,t+i} Y_{t+i} \left( \frac{P_{t+i}}{P_t} \right)^{\theta_t - 1}} \quad (11)$$

となる。ここで  $Z_t \equiv \theta_t / (\theta_t - 1)$  は時変的なマークアップ率である。価格改定企業の割合より、価格が粘着的な場合の物価指数は

$$P_t = \left[ \omega P_{t-1}^{1-\theta_t} + (1-\omega)(P_t^{opt})^{1-\theta_t} \right]^{\frac{1}{1-\theta_t}} \quad (12)$$

と表せる。

### 中央銀行の行動

中央銀行は、インフレ率および GDP の目標値からの乖離と GDP ギャップに対応して、操作変数である短期金利を調整するものとする。ただし金利調整にはラグがあり、現在の金利に最適な金利の  $(1 - \rho_i)$  分だけを反映するとする。物価の目標値をトレンド経路上の値とし、政策反応係数が経済規模に依存せず同次関数で表せると仮定すると、中央銀行の政策反応関数は

$$R_t = R_{t-1}^{\rho_i} \left[ R_t^* \cdot \left( \frac{P_t/P_{t-1}}{P_t^*/P_{t-1}^*} \right)^{\phi_\pi} \left( \frac{Y_t}{Y_t^{target}} \right)^{\phi_y} \right]^{1-\rho_i} e^{\varepsilon_t^i} \quad (13)$$

となる。ここで  $R_t = (1 + i_t)$  は粗利率、 $Y_t^{target}$  は  $t$  期の目標とする GDP の水準、 $\varepsilon_t^i$  は平均ゼロ、分散一定の正規分布に従う金融政策ショックを表す。

本研究では、GDPの目標値の異なる以下の2つのモデルを検討する。

$$(\text{モデル1}) Y_t^{\text{target}} = Y_t^f$$

$$(\text{モデル2}) Y_t^{\text{target}} = Y_{t-1}$$

ここで  $Y_t^f$  は潜在GDPを表し、モデル1は潜在GDPからの乖離であるGDPギャップを政策変数とする典型的なテイラー・ルールである。しかし日本の実証結果では、テイラー・ルールは必ずしも当てはまりがよくない。そこで中央銀行が実質成長率（前期比）に反応する政策ルールとして、モデル2を検討する。

#### 動学的確率一般均衡の線形近似

以上で提示されたモデルの動学的確率一般均衡は、家計の最適条件 (3)、(4)、(5) 式、企業の最適条件 (10)、(11) 式、物価水準 (12) 式、中央銀行の金融政策ルール (13) 式のすべてをみだし、かつ財市場と労働市場の均衡条件

$$Y_t = C_t \quad (14)$$

$$N_t = N_t^d \quad (15)$$

を同時にみだし、GDP、雇用量、物価、利子率の動学経路  $\{Y_t, N_t, P_t, i_t\}_{t=0}^{\infty}$  である。この均衡経路を定める均衡動学システムは、将来への期待変数を含む非線形離散力学系であるため、大域的な期待モデルの期待均衡解を得るのは極めて難しい。そこで均衡動学システムをトレンド経路の近傍で線形近似することで、比較的解析の容易な線形合理的期待モデルにもとづく分析を行う。

あらかじめトレンド経路近傍における変数を定義しておく。 $t$  期のGDP成長率を  $g_t \equiv \ln Y_t - \ln Y_{t-1}$ 、インフレ率を  $\pi_t \equiv \ln P_t - \ln P_{t-1}$  と表す。データ観測期間におけるトレンド経路上のGDP水準を  $Y_t^*$ 、物価水準を  $P_t^*$  と表し、トレンド経路上のGDP成長率（均斉成長率）を  $g^* \equiv \ln Y_t^* - \ln Y_{t-1}^*$ 、インフレ率を  $\pi^* \equiv \ln P_t^* - \ln P_{t-1}^*$  とする。また均衡GDPのト

トレンド経路との乖離率を  $\hat{y}_t \equiv \ln Y_t - \ln Y_t^*$ 、インフレ率のトレンド経路との乖離率を  $\hat{\pi}_t \equiv \pi_t - \pi^*$ 、利率のトレンド経路との乖離率を  $\hat{i}_t \equiv i_t - i^*$  と表す。

まず、需要サイドにおける均衡GDPの動学方程式は、家計の最適条件 (3)、(4)、(5) 式と財市場の均衡条件 (14) 式から得られる。ラグランジュ乗数 (3) 式に財市場の均衡条件 (14) 式を代入して、トレンド経路の近傍で対数線形近似すると、ラグランジュ乗数のトレンド経路上の値からの乖離率  $\hat{\lambda}_t \equiv \ln \Lambda_t - \ln \Lambda_t^*$  を

$$\hat{\lambda}_t = \left[ \frac{1}{e^h - h\beta} \right] \left[ \begin{aligned} & \{-\mu e^h - h\beta(h(\mu - 1) - 1)\}y_t + \{h(\mu - 1)e^h\}y_{t-1} \\ & + \{h\beta(\mu - 1)\}E_t y_{t+1} + e^h d_t - h\beta E_t d_{t+1} \end{aligned} \right] \quad (16)$$

と表すことができる。利率のトレンド利率からの乖離を  $\hat{i}_t \equiv i_t - i^*$  とおき、オイラー方程式 (4) 式をトレンド経路近傍で近似すると

$$\hat{\lambda}_t = E_t \hat{\lambda}_{t+1} + (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) \quad (17)$$

となる。(16) 式と (17) 式が需要サイドにおける均衡GDPの動学経路を定める式となる。

次に、供給サイドの均衡GDPを導出する。労働供給関数 (5) 式および労働需要関数 (9) 式から、労働市場の均衡では

$$\frac{e^{d_t} \chi N_t^\xi}{\Lambda_t} = A_t MC_t$$

が成り立つ。これを中間財企業の生産関数に代入すると

$$Y_t = A_t \frac{\xi+1}{\xi} \left[ \frac{MC_t \Lambda_t e^{-d_t}}{\chi} \right]^{\frac{1}{\xi}}$$

となり、労働市場を均衡させる供給サイドの均衡GDP水準が得られる。ここで  $\hat{n}_t$ 、 $\hat{w}_t$ 、 $\hat{p}_t$ 、 $\hat{m}\hat{c}$ 、 $\hat{a}_t$  をそれぞれ労働量、名目賃金、物価水準、限界費用、生産性のトレンド経路からの乖離率とし、トレンド経路近傍で線形近似すると、中間財企業の価格決定が粘着的な場合の供給サイドの均



衡GDP

$$\hat{y}_t = \left(\frac{\xi + 1}{\xi}\right) \hat{a}_t + \frac{1}{\xi} (\widehat{mc}_t + \hat{\lambda}_t - d_t) \quad (18)$$

が得られる。

インフレ率は、中間財企業の最適価格の条件 (11) 式および物価指数 (12) 式によって決まる。ここではWoodford (2003) およびChristiano他 (2005) に従い、最適な価格への改定を行わない他の企業も、物価スライドのようなインデクセーション・ルールに従って一定割合の調整が行われる場合を加味する。それぞれをトレンド経路の近傍で対数線形近似し組み合わせると、ハイブリット型ニューケインジアン・フィリップス曲線

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_t = & \gamma \hat{\pi}_{t-1} + \beta E_t(\hat{\pi}_{t+1} - \gamma \hat{\pi}_t) + \frac{(1 - \beta\omega)(1 - \omega)}{\omega} \widehat{mc}_t \\ & + \frac{1 - \omega}{\omega} (\hat{z}_t - \beta\omega E_t \hat{z}_{t+1}) \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。ここで  $z_t$  は時変マークアップ率のトレンド経路からの乖離率である。

最後に中央銀行の金融政策ルールをトレンドからの乖離率で表すと、モデル 1 は

$$\hat{i}_t = \rho_i \hat{i}_{t-1} + (1 - \rho_i) [\phi_\pi \hat{\pi}_t + \phi_y (\hat{y}_t - \hat{y}_t^f)] + \varepsilon_t^i \quad (20)$$

モデル 2 では

$$\hat{i}_t = \rho_i \hat{i}_{t-1} + (1 - \rho_i) [\phi_\pi \hat{\pi}_t + \phi_y (\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1} + g^*)] + \varepsilon_t^i \quad (21)$$

となる<sup>6)</sup>。

潜在GDP

GDPギャップとは、何らかの尺度で測った潜在GDPに対して実際の均衡GDPの乖離率として定義されるものである。したがって、潜在GDPをどう定義するかによってGDPギャップの定義も変わってくることになる。上記のモデルでは、中間財市場が独占的競争市場であることによる価格の

硬直性と、企業の価格決定が部分的にしか行われないうことによる価格の粘着性という、二つの摩擦が存在した。ここではそれらの摩擦がどちらも存在せず、中間財市場が完全競争であり、かつすべての企業が最適価格を選択できると仮定した場合に実現すると考えられるGDPを、潜在GDPと定義する。これは言い換えると、厚生経済学の基本定理が成り立つような効率的なGDPの水準にほかならず、これによって推計されるGDPギャップは効率的なGDPからの乖離率という経済学的に明確な意味付けを持つことになる。

本論文のモデルにおける潜在GDPは、価格据え置き企業の比率がゼロ ( $\omega = 0$ ) であり価格が伸縮的に決定され、マークアップ率が常に1 ( $Z_t = 1$ ) の場合に対応する。このとき物価指数 (12) 式から、 $P_t = P_t^{opt}$  となる。これらを中間財企業の最適価格付け (11) 式に代入すると、 $1 = MC_t$  となる。したがって、伸縮価格のケースに対応する労働量とラグランジュ乗数を、それぞれ  $N_t^f$ 、 $A_t^f$  とおくと、伸縮価格における労働市場の均衡条件は、

$$\frac{e^{dt} \chi (N_t^f)^\xi}{A_t^f} = A_t$$

となる。これを中間財企業の生産関数 (10) 式に代入し、トレンド近傍で線形近似すると、伸縮的な価格決定に対応する潜在GDPのトレンドからの乖離率が

$$\hat{y}_t^f = \left( \frac{\xi + 1}{\xi} \right) \hat{a}_t + \frac{1}{\xi} (\hat{\lambda}_t^f - d_t) \quad (22)$$

と表される。ここで

$$\hat{\lambda}_t^f = \left[ \frac{1}{e^h - h\beta} \right] \left[ \begin{array}{l} \{-\mu e^h - h\beta(h(\mu - 1) - 1)\} \hat{y}_t^f + \{h(\mu - 1)e^h\} \hat{y}_{t-1}^f \\ + \{h\beta(\mu - 1)\} E_t \hat{y}_{t+1}^f + e^h d_t - h\beta E_t d_{t+1} \end{array} \right] \quad (23)$$

は、財市場の均衡GDPが潜在GDP水準  $\hat{y}_t^f$  であるときのラグランジュ乗数

である。

### 線形合理的期待均衡解

本論文では、生産性、需要、マークアップ率に生じる外生ショックが、それぞれAR (1) 過程

$$\hat{a}_t = \rho_a \hat{a}_{t-1} + \varepsilon_t^a \quad (0 \leq \rho_a \leq 1) \quad (24)$$

$$d_t = \rho_d d_{t-1} + \varepsilon_t^d \quad (0 \leq \rho_d \leq 1) \quad (25)$$

$$\hat{z}_t = \rho_z \hat{z}_{t-1} + \varepsilon_t^z \quad (0 \leq \rho_z \leq 1) \quad (26)$$

に従い、各外生的攪乱項は平均ゼロ、分散一定の正規分布に従うと仮定する。ここで改めてモデルを整理すると、動学的確率一般均衡を構成するのは、均衡条件の (16)、(17)、(18)、(19) 式、金融政策ルールの (20) 式もしくは (21) 式、潜在GDPの定義から (22)、(23) 式、それに生産性、需要ショック、マークアップ率の遷移式 (24)、(25)、(26) 式の3つを加えた、10本の方程式からなる線形離散力学系となる。

このモデルには6つの期待変数が含まれており、合理的期待均衡解を求める必要がある。線形合理的期待モデルを解くにはいくつかの方法があるが、ここでは Sims (2002) の方法を用いる<sup>7)</sup>。モデルの期待変数について、以下のように予測誤差を

$$\eta_t^y = \hat{y}_t - E_{t-1} \hat{y}_t, \quad \eta_t^{y^f} = \hat{y}_t^f - E_{t-1} \hat{y}_t^f,$$

$$\eta_t^\lambda = \hat{\lambda}_t - E_{t-1} \hat{\lambda}_t, \quad \eta_t^\pi = \hat{\pi}_t - E_{t-1} \hat{\pi}_t,$$

$$\eta_t^d = d_t - E_{t-1} d_t, \quad \eta_t^z = \hat{z}_t - E_{t-1} \hat{z}_t$$

と定義する。モデルの変数、外生的攪乱項、予測誤差、パラメータのベクトルを、それぞれ

$$\mathbf{s}_t = (\hat{y}_t, \hat{y}_t^f, \hat{\lambda}_t, \hat{\lambda}_t^f, \hat{\pi}_t, \hat{i}_t, \hat{a}_t, d_t, \hat{z}_t, \widehat{mc}_t, E_t \hat{y}_{t+1}, E_t \hat{y}_{t+1}^f, E_t \hat{\lambda}_{t+1}, E_t \hat{\pi}_{t+1}, E_t d_{t+1}, E_t \hat{z}_{t+1})'$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t^i, \varepsilon_t^a, \varepsilon_t^d, \varepsilon_t^z)'$$

$$\boldsymbol{\eta}_t = (\eta_t^y, \eta_t^{y^f}, \eta_t^\lambda, \eta_t^\pi, \eta_t^d, \eta_t^z)'$$

$$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \xi, h, \omega, \phi_\pi, \phi_y, g^*, \pi^*, r^*, \rho_i, \rho_\alpha, \rho_d, \rho_z, \sigma_i, \sigma_\alpha, \sigma_d, \sigma_z)'$$

とすると、モデルの動学的一般均衡の線形合理的期待システムは、パラメータ  $\boldsymbol{\theta}$  に依存する係数行列を用いて

$$\Gamma_0(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_t = \Gamma_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_{t-1} + \Psi_0(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varepsilon}_t + \Pi_0(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\eta}_t \quad (27)$$

と書き表すことができる。

本研究のモデルにおける係数行列は、以下のようになる。

$$\Gamma_0(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_2 & 0 & 0 & -A_3 & 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -B_1 & -B_2 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & B_3 \\ 0 & 1 & 0 & -C_1 & 0 & 0 & -C_2 & C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -A_2 & 0 & 0 & 0 & -A_3 & 0 & 0 & A_4 & 0 \\ -D_1 & D_2 & 0 & 0 & -D_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_0(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_0(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、以下の行列の成分は、ルール1・ルール2とも共通に

$$A_1 = \left[ \frac{1}{e^h - h\beta} \right] \{-\mu e^h - h\beta(h(\mu - 1) - 1)\}, \quad A_2 = \left[ \frac{1}{e^h - h\beta} \right] e^h,$$

$$A_3 = \left[ \frac{1}{e^h - h\beta} \right] \{h\beta(\mu - 1)\}, \quad A_4 = - \left[ \frac{1}{e^h - h\beta} \right] h\beta,$$

$$A_5 = \left[ \frac{1}{e^h - h\beta} \right] \{h(\mu - 1)e^h\},$$

$$B_1 = \frac{1 - \omega}{\omega}, \quad B_2 = \frac{(1 - \beta\omega)(1 - \omega)}{\omega}, \quad B_3 = \frac{(1 - \omega)\beta\omega}{\omega},$$

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{\xi}, \quad C_2 = \frac{1 + \xi}{\xi},$$

である。金融政策がルール1のとき、

$$D_1 = -D_2 = (1 - \rho_i)\phi_y, \quad D_3 = (1 - \rho_i)\phi_\pi, \quad D_4 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t^i \\ \varepsilon_t^a \\ \varepsilon_t^d \\ \varepsilon_t^z \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \right) \quad (28)$$

となり、ルール2のときは、

$$D_1 = D_4 = (1 - \rho_i)\phi_y, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = (1 - \rho_i)\phi_\pi$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_t^i \\ \varepsilon_t^a \\ \varepsilon_t^d \\ \varepsilon_t^z \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} (1 - \rho_i)\phi_y g^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \right) \quad (29)$$

となる。この係数行列を用いて、Sims (2002) の方法により線形合理的期待モデルを解くと、モデルの合理的期待均衡解

$$\mathbf{s}_t = \Theta_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}_{t-1} + \Theta_0(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (30)$$

が得られる<sup>8)</sup>。

### 3 推定方法

#### モデルの状態空間表現

本研究では、状態空間モデルを用いて、合理的期待均衡解 (30) 式のパラメータの推定を行う。状態空間モデルは、状態変数の時間遷移を表す遷移方程式と、状態変数と観測値の関係を表す観測方程式からなる。モデルの内生変数には、

$$\begin{aligned} g_t &= g^* + (\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}) \\ \pi_t &= \pi^* + \hat{\pi}_t \\ i_t &= i^* + \hat{i}_t \end{aligned}$$

という関係が成り立っている。実質GDP成長率の観測データを  $g_t^{obs}$ 、インフレ率の観測データを  $\pi_t^{obs}$ 、名目利子率の観測データを  $i_t^{obs}$  とおく。すべての観測値は百分率 (%) で表示し、年率換算されたデータは四半期に直すとする。  $g_t$ 、  $\pi_t$ 、  $i_t$  の観測誤差  $u_t^g$ 、  $u_t^\pi$ 、  $u_t^i$  はそれぞれ平均ゼロ、分散一定の正規分布に従うとすると、観測方程式は、

$$\begin{bmatrix} g_t^{obs} \\ \pi_t^{obs} \\ i_t^{obs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^* \\ \pi^* \\ i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_t \\ \hat{y}_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t^g \\ u_t^\pi \\ u_t^i \end{bmatrix} \quad (31)$$

と表すことができる<sup>9)</sup>。ただし行列の中の省略された要素はすべて0である。

一方、遷移方程式は合理的期待均衡解 (30) 式に  $\hat{y}_{t-1} = \hat{y}_{t-1}$  を付け足し、 $\mathbf{e} = (1, 0, 0, \dots, 0)$  を用いて

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_t \\ \hat{y}_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Theta}_1 & \mathbf{0}_{16 \times 1} \\ \mathbf{e} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{t-1} \\ \hat{y}_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Theta}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (32)$$

と表すことができる。ここで観測方程式の攪乱項は正規分布

$$\begin{bmatrix} u_t^g \\ u_t^\pi \\ u_t^i \end{bmatrix} \sim N \left( \mathbf{0}, \begin{bmatrix} \sigma_g^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ui}^2 \end{bmatrix} \right) \quad (33)$$

に従うものとする。

#### カルマン・フィルターとベイズ推定

モデル状態空間表現が線形ガウス型である場合、観測データ  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T\}$  に関する尤度  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$  を、カルマン・フィルターを用いて計算することができる<sup>10)</sup>。第  $t-1$  期までの観測データ  $\mathbf{X}^{t-1} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{t-1}\}$  を所与とする  $\mathbf{x}_t$  の条件付き予測誤差を  $\mathbf{v}_{t|t-1}$ 、条件付き分散共分散行列を  $\mathbf{F}_{t|t-1}$  とすると、誤差項の正規性からカルマン・フィルターの逐次予測と更新によって求まる対数尤度は

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = -\frac{nT}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{F}_{t|t-1}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}'_{t|t-1} \mathbf{F}_{t|t-1}^{-1} \mathbf{v}_{t|t-1} \quad (34)$$

で与えられる。この尤度関数に対して、ベイズ推定によってパラメータを推定する。事前分布  $p(\boldsymbol{\theta})$  と尤度  $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$  が与えられたとき、事後分布  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$  は

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \frac{L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})p(\boldsymbol{\theta})}{\int L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})p(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \quad (35)$$

となるが、右辺の分母はパラメータに依存しないため、右辺の分子の計算

を行えばよい。

パラメータ $\theta$ の推定値が得られたら、ショックを分解するためにカルマン・スムージングを行う。カルマン・スムージングはT期までのすべての情報が得られた条件付きでの、モデルの内生変数の値を求める方法である。スムージングによって内生変数の動きが求まると、データと整合性のあるショックを逆算することができる。こうして得られたスムージング変数を用いて分析を行う。

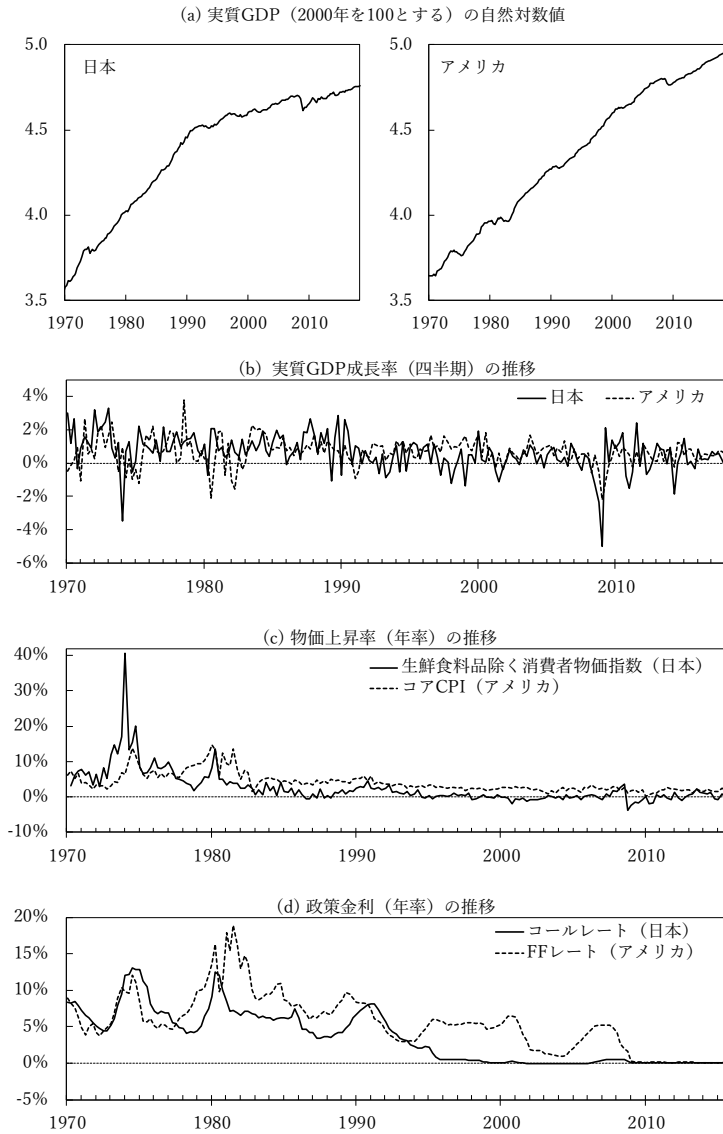
## 4 実証分析

### データの作成および事前分布の設定

本研究の推定に用いる観測データは、GDP成長率、インフレ率、名目利子率（政策金利）の3系列である。日本の分析においては、実質GDPは「国民経済計算」の国民総生産（支出側）の四半期データを用い、季節調整済み系列をそれぞれ接続したのち、モデルに合わせ「労働力調査」の15歳以上人口で割って一人当たりGDPを計算した。インフレ率はコアCPI上昇率とし、消費者物価指数（生鮮食品を除く）を季節調整した後で、四半期の変化率を求めた<sup>11)</sup>。物価上昇率には消費税の導入・税率改正の影響が含まれていることが想定されるため、1989年の導入時および1997年と2014年の税率改正時について消費税調整を行った<sup>12)</sup>。名目利子率には、1985年7月以降は無担保コールレート・オーバーナイト、1985年6月以前は有担保コールレート翌日物を用いた。アメリカのデータは、すべてFederal Reserve Economic Data (FRED) から利用し、GDP成長率は実質GDPの四半期季節調整済み、消費者物価指数にはコアCPI (All items non-food non-energy) の季節調整済み四半期データから変化率を取ったものを、政策金利にはFFレートを用いた。すべての変数は百分率 (%) 表示し、インフレ率と名目利子率は年率換算した。図1は作成したデータを図示したも



図1 観測データ



のである。

次にモデルの推定期間であるが、本研究と同規模の観測変数が3つとなる分析では、モデルに含まれるテイラー・ルールの説明力が失われるゼロ金利政策の採用期間を含まずに計測しているものが多い<sup>13)</sup>。図1(d)にみられるようにアメリカではリーマン・ショック後の2008年末から、日本では1999年2月からゼロ金利となっているため、この期間は分析から除外した。次に図1(a)によって実質GDPの定常性をみると、アメリカの実質GDPの成長率は概ね一定であり、長期に渡って均斉成長経路上にあると考えられるのに対し、日本の実質GDPは1970年を前後に成長率が変化しており、トレンド成長率が大きく変化している。したがって日本経済の分析においては、トレンド成長率が変化する1970年前後で期間を分割し、それぞれ異なる推定をする必要がある。以上の観点から、アメリカ経済については1965年から2008年まで、日本経済に関しては1970年から1989年までと1990年から1998年までの2つの期間に分けて推計を行った。しかし日本経済の後半に関しては、推定期間が短いことと金融政策および物価の変化が乏しいことから、スムージングしたGDPギャップについて明瞭な動きが見られず、本論文において言及しないこととする。

パラメータの事前分布は、An and Schorfheide (2007)、Hirose and Naganuma (2007) および藤原・渡部 (2011)などを参照しつつ、表1のように設定した。パラメータのうち割引因子 $\beta$ はモデルと整合的に決まるものとし、トレンド経路上でのオイラー方程式(式)をトレンド経路上で整理し、 $r^* = i^* - \pi^*$ とおいて、

$$\beta = [\exp(r^* + g^*[h(\mu - 1) - \mu])]^{-1}$$

をみたすように決まるものとした。

#### パラメータの事後分布

表2および表3は、それぞれアメリカ経済と日本経済についての事後分

表1 パラメータの事前分布

		分布	平均	標準偏差
構造パラメータ				
消費の代替弾力性	$\mu$	ガンマ	1.80	0.25
労働の代替弾力性	$\xi$	ガンマ	1.00	0.40
消費の習慣形成	$h$	ベータ	0.50	0.20
価格改定企業の割合	$\omega$	ベータ	0.66	0.10
インデクセーション	$\gamma$	ベータ	0.50	0.20
金融政策パラメータ				
インフレ率の係数	$\phi_{\pi}$	ガンマ	1.50	0.25
GDPの係数	$\phi_y$	ガンマ	0.50	0.25
利子率の調整係数	$\rho_i$	ベータ	0.50	0.20
観測定数				
(アメリカ) 成長率	$g^*$	ガンマ	0.80	0.10
インフレ率	$\pi^*$	ガンマ	1.10	0.10
名目利子率	$r^*$	ガンマ	1.60	0.10
(日本) 成長率	$g^*$	ガンマ	0.80	0.20
インフレ率	$\pi^*$	ガンマ	1.30	0.25
名目利子率	$r^*$	ガンマ	1.70	0.10
ショックの慣性係数				
生産性	$\rho_a$	ベータ	0.50	0.25
需要	$\rho_d$	ベータ	0.50	0.25
マークアップ率	$\rho_z$	ベータ	0.50	0.25
誤差項の標準偏差				
金融政策	$\sigma_i$	逆ガンマ	0.50	0.30
生産性	$\sigma_a$	逆ガンマ	0.50	0.30
需要	$\sigma_d$	逆ガンマ	0.50	0.30
マークアップ率	$\sigma_z$	逆ガンマ	0.50	0.30
成長率の観測誤差	$\sigma_g$	逆ガンマ	0.50	2.00
インフレ率の観測誤差	$\sigma_{\pi}$	逆ガンマ	0.50	2.00
名目利子率の観測誤差	$\sigma_{ui}$	逆ガンマ	0.50	2.00

布の推定結果である。はじめに周辺尤度をみると、アメリカ・日本ともに、モデル1の方がモデル2よりも周辺尤度が高く、潜在GDPからの乖離率でみたGDPギャップによる金融政策を採用したモデルの方が、成長率ルールによる金融政策ルールを採用したモデルよりもデータとの整合性が高い結果となった。

表2 パラメータの事後分布（アメリカ：1965年～2008年）

		モデル1 (GDP ギャップ)		モデル2 (成長率)	
		平均	90%信頼区間	平均	90%信頼区間
構造パラメータ					
消費の代替弾力性	$\mu$	1.83	[1.48, 2.16]	1.99	[1.62, 2.32]
労働の代替弾力性	$\xi$	0.70	[0.24, 1.13]	0.78	[0.28, 1.28]
消費の習慣形成	$h$	0.78	[0.61, 0.96]	0.82	[0.68, 0.96]
価格改定の割合	$\omega$	0.82	[0.75, 0.88]	0.89	[0.86, 0.93]
インデクセーション	$\gamma$	0.29	[0.04, 0.55]	0.57	[0.24, 0.92]
金融政策パラメータ					
インフレ率の係数	$\phi_\pi$	1.38	[1.07, 1.65]	1.62	[1.40, 1.81]
GDP の係数	$\phi_y$	0.89	[0.49, 1.30]	0.61	[0.36, 0.85]
利率の調整係数	$\rho_i$	0.69	[0.61, 0.79]	0.77	[0.72, 0.81]
観測定数					
成長率	$g^*$	0.79	[0.73, 0.85]	0.80	[0.74, 0.85]
インフレ率	$\pi^*$	1.09	[0.97, 1.21]	1.31	[1.18, 1.44]
名目利率	$r^*$	1.60	[1.45, 1.73]	1.54	[1.39, 1.69]
外生ショックの慣性係数					
生産性	$\rho_a$	0.90	[0.83, 0.99]	0.57	[0.24, 0.95]
需要	$\rho_d$	0.79	[0.71, 0.88]	0.94	[0.90, 0.97]
マークアップ率	$\rho_z$	0.88	[0.81, 0.95]	0.82	[0.66, 0.97]
誤差項の標準偏差					
金融政策	$\sigma_i$	0.15	[0.11, 0.18]	0.25	[0.21, 0.28]
生産性	$\sigma_a$	0.83	[0.32, 1.21]	0.57	[0.12, 1.39]
需要	$\sigma_d$	2.36	[1.76, 2.96]	3.69	[2.54, 4.94]
マークアップ率	$\sigma_z$	0.66	[0.30, 1.01]	1.44	[0.17, 2.10]
成長率の観測誤差	$\sigma_g$	0.45	[0.19, 0.73]	0.34	[0.16, 0.51]
インフレ率の観測誤差	$\sigma_\pi$	0.17	[0.13, 0.22]	0.22	[0.18, 0.26]
名目利率の観測誤差	$\sigma_{ui}$	0.12	[0.09, 0.15]	0.12	[0.09, 0.15]
対数周辺尤度		-316.747962		-333.124331	

表3 パラメータの事後分布（日本：1970年～1989年）

		モデル1 (GDP ギャップ)		モデル2 (成長率)	
		平均	90%信頼区間	平均	90%信頼区間
構造パラメータ					
消費の代替弾力性	$\mu$	1.86	[1.47, 2.27]	1.80	[1.39, 2.19]
労働の代替弾力性	$\xi$	0.84	[0.32, 1.37]	0.88	[0.33, 1.43]
消費の習慣形成	$h$	0.48	[0.14, 0.81]	0.36	[0.10, 0.63]
価格改定の割合	$\omega$	0.78	[0.68, 0.87]	0.77	[0.68, 0.86]
インデクセーション	$\gamma$	0.70	[0.45, 0.95]	0.74	[0.52, 0.96]
金融政策パラメータ					
インフレ率の係数	$\phi_\pi$	1.32	[1.02, 1.59]	1.39	[1.13, 1.66]
GDP の係数	$\phi_y$	0.83	[0.35, 1.28]	0.19	[0.04, 0.34]
利率の調整係数	$\rho_i$	0.85	[0.80, 0.91]	0.81	[0.74, 0.88]
観測定数					
成長率	$g^*$	0.80	[0.68, 0.91]	0.79	[0.71, 0.86]
インフレ率	$\pi^*$	1.32	[1.17, 1.46]	1.37	[1.23, 1.52]
名目利率率	$r^*$	1.68	[1.55, 1.81]	1.71	[1.56, 1.85]
外生ショックの慣性係数					
生産性	$\rho_a$	0.63	[0.36, 0.92]	0.58	[0.27, 0.89]
需要	$\rho_d$	0.55	[0.22, 0.88]	0.88	[0.81, 0.96]
マークアップ率	$\rho_z$	0.81	[0.69, 0.93]	0.53	[0.24, 0.83]
誤差項の標準偏差					
金融政策	$\sigma_i$	0.15	[0.10, 0.20]	0.17	[0.12, 0.23]
生産性	$\sigma_a$	1.04	[0.14, 1.84]	1.18	[0.11, 2.76]
需要	$\sigma_d$	0.48	[0.12, 0.99]	2.11	[1.30, 2.94]
マークアップ率	$\sigma_z$	1.24	[0.40, 2.08]	1.23	[0.14, 2.20]
成長率の観測誤差	$\sigma_g$	0.78	[0.55, 1.03]	0.40	[0.14, 0.73]
インフレ率の観測誤差	$\sigma_\pi$	0.89	[0.73, 1.04]	0.98	[0.77, 1.17]
名目利率率の観測誤差	$\sigma_{ui}$	0.10	[0.08, 0.12]	0.10	[0.08, 0.12]
対数周辺尤度		-235.576741		-247.992034	

モデル1について、それぞれのパラメータの事後分布を比較すると、消費・労働の代替の弾力性は両国とも似たような数値となっている一方、消費の習慣形成はアメリカの0.78に対して日本は0.48とやや低い数値になった。反対にインデクセーションによる物価改定の係数はアメリカが0.29に対し、日本の方が0.70と高い結果となった。金融政策に関するパラメータは、利子率の粘着性を表す調整係数について日本のほうがやや高いものの、概ね似たような数値を示している。しかしながら、仮にモデル2を採用した場合、金融政策におけるGDPの反応係数はアメリカに比べても大きく小さい値なる。

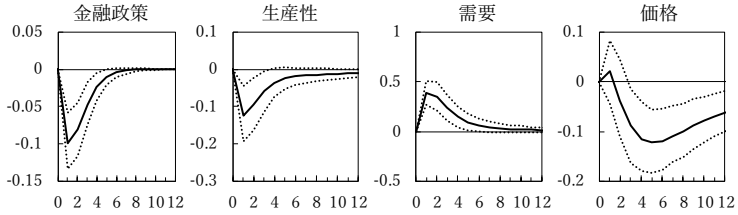
外生ショックのAR(1)係数をみると、アメリカに比べて日本のモデル1の推定結果では需要ショックの係数が小さい値になっている。同様に誤差項の標準偏差をみても需要ショックの値が小さい。これは日本のモデル1の推定では需要ショックは規模としても小さく時間的波及も小さかったことを意味する。実際、図3の日本のヒストリカル分解をみると、需要ショック要因が、アメリカに比べて少なくなっている。それに対し、日本のモデル2の推定結果では、需要ショックのAR(1)係数および誤差項の標準偏差ともにアメリカの推定結果に近い値になっている。これにより日本のモデル2のヒストリカル分解では需要ショックの要因はアメリカに近い影響を示している。

### インパルス応答関数

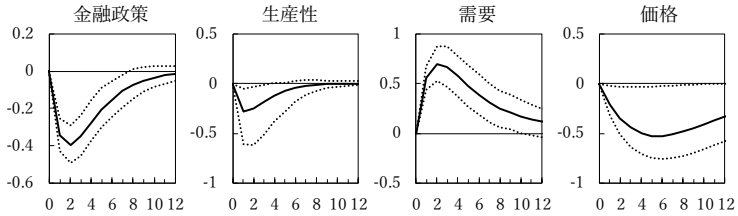
図2は各外生ショックのGDPギャップに対する直交化インパルス応答関数を表している。これをみると両国両モデルについて細かな点に差異はあるものの、概ね同様の傾向を示した。金融政策ショックは利上げによる金融引き締めによりGDPギャップに負のインパクトをもたらし、生産性ショックは潜在GDPの増加を通じて負のインパクトをもたらしている。一方、需要ショックは均衡GDPの増大を通じて正のインパクトをもたら

図2 外生ショックのGDPギャップに対するインパルス応答関数

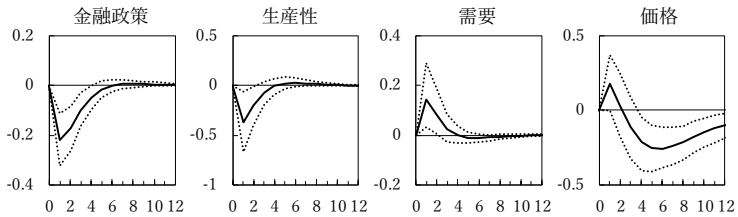
(a) アメリカ経済 (モデル1)



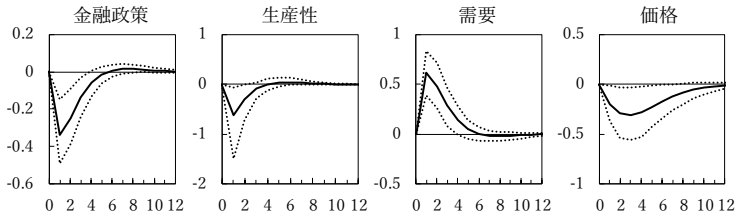
(b) アメリカ経済 (モデル2)



(c) 日本経済 (モデル1)



(d) 日本経済 (モデル2)



注) 点線は90%信頼区間を表す。

すことがわかる。マークアップ率による価格ショックは、モデル1では日米ともに最初の1期については短期的にプラスのインパクトを生じているが、中長期的にはどちらのモデルも負のインパクトをもたらしている。これらの傾向は総じて経済理論が想定するところと整合的である。一方、ショックの継続性をみると、大半のショックが数期程度で効果を消失するが、マークアップ率の上昇による価格ショックは10期を超えて比較的長い間効果が残存しており、とくにアメリカ経済における残存期間が長い特徴がある。

### GDPギャップの推計値

以上を念頭に置きつつ、GDPギャップの推計結果をみてみよう。図3～6は日米両国におけるモデル1（GDPギャップルール）およびモデル2（成長率ルール）について、カルマン・スムージングによって得られたGDPギャップの推計結果および外生ショックのヒストリカル分解を表したものである。

まず金融政策にGDPギャップルールを用いる場合のモデル1についてみてみよう。図3のアメリカ経済および図5の日本経済をみると、GDPギャップの正負の傾向としてはHPフィルターでの推計と似た傾向を示しているものの、潜在GDP自体が変動して均衡GDPの変動を相殺しており、HPフィルターの推計に比べてギャップの幅が小さくなっている。図3のアメリカ経済では1978～79年にかけてと1982～83年にかけては、HPフィルターの推計が大きなGDPギャップを計測しているのに対し、DSGEモデルでは潜在GDPの変動が均衡GDPの変動をほとんど相殺してGDPギャップはほとんど生じておらず、両推計間で大きく異なる結果となっている。図5の日本経済では1972～73年、1981年前後1986～88年の円高不況期においては、HPフィルターの推計と大きくズレが生じている。ただし、この点は推計に用いたDSGEモデルが小規模であるため、投資需要の変動や



図3 アメリカ経済（モデル1）の推計結果

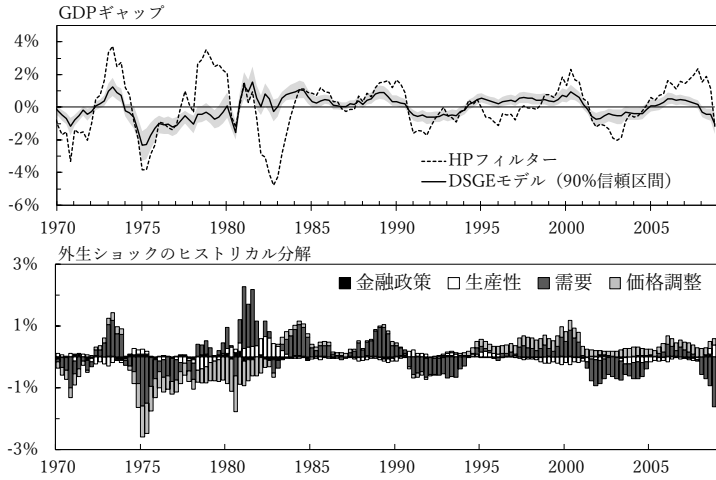


図4 アメリカ経済（モデル2）の推計結果

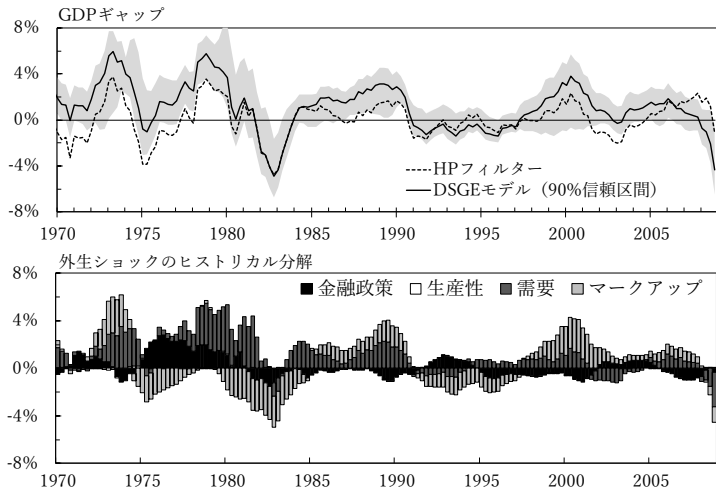


図5 日本経済（モデル1）の推計結果

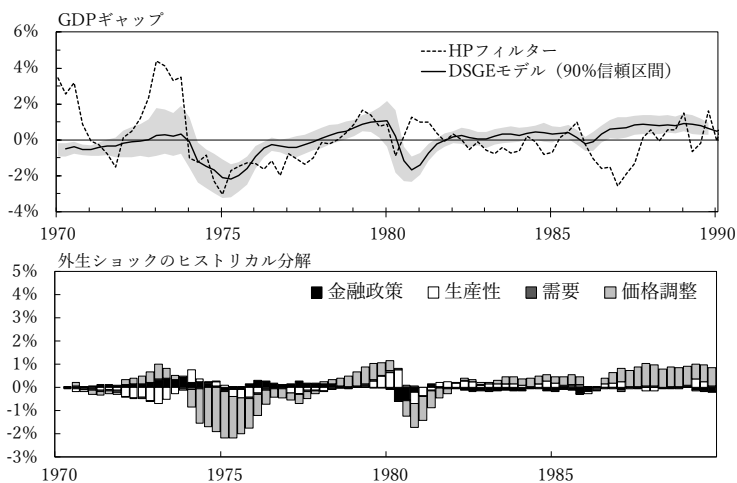
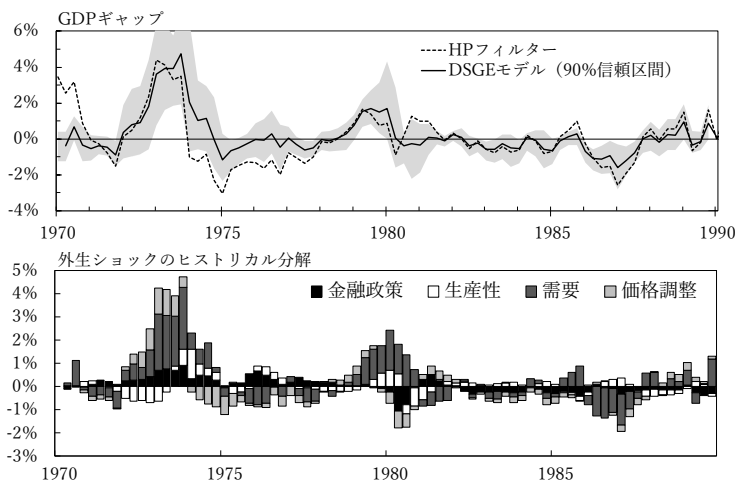


図6 日本経済（モデル2）の推計結果



為替レートの影響などモデルに含まれていない要因が推計に反映されていない可能性も考えられる。ヒストリカル分解をみると、アメリカ経済では1975年～1980年代前半の高インフレ期には価格調整ショックが大きく負の要因となっているが、その他の時期では、概ね需要ショックが主要な要因となっているのに対し、日本経済では需要ショックの寄与は小さくなく、すべての期間で概ね価格調整ショックが主要因となっている。

一方、金融政策に成長率ルールを用いるモデル2では、推計結果が大きく異なっている。対数周辺尤度による統計的な当てはまりでは、日米ともにモデル2はモデル1より低く評価されている。しかし図4および図6に示した推計結果からHPフィルターの計測結果との差異をみると、アメリカ・日本ともにモデル1の推定結果はHPフィルターと異なる動きを示す期間が多いのに対し、モデル2の推計結果はHPフィルターに近い動きをしている。HPフィルターの推計結果が生産関数による内閣府および日銀推計と似た傾向を示していることを考えると、対数周辺尤度の結果だけから、モデル2によるGDPギャップの推計結果がモデル1よりも当てはまりが悪いと断じて良いものか、必ずしも断定できないように思われる。ヒストリカル分解の結果をみても、日米ともにイベントにおける各ショック要因の寄与が説明つけやすく、解釈上整合性が高いように見受けられる。この点について、とくに日本の実証研究ではGDPギャップを用いたテイラー・ルールよりも、GDP成長率を用いた方が実証上のパフォーマンスが良いことが知られており、モデルの特定化の問題を含んでいる可能性が指摘できる。

## 5 結論

本論文では、標準的なニューケインジアンDSGEモデルを用いて、モデルにおける効率的なGDPの水準からの乖離をGDPギャップと定義し、パ

ラメータの構造推定によってGDPギャップを推計した。モデルの金融政策ルールにはGDPギャップを用いるものと実質GDP成長率を用いるもの2種類を採用し、日米のデータを用いた推計結果を比較した。その結果、インパルス応答分析では、いずれのケースにおいても外生的なショックに起因する利上げによる金融引き締め、生産性の上昇、マークアップ率の上昇による価格上昇はGDPギャップに負のインパクトをもたらし、反対に外生的な需要ショックによる需要の増大はGDPギャップに正のインパクトを生じることが示された。一方、パラメータの推計結果からスムージングにより求めたGDPギャップおよびヒストリカル分解の結果は、推計結果がモデルの設定に依存し、大きく異なるものとなった。

周辺尤度を用いた事後オッズ比によるモデル間の比較では、日米両国ともに金融政策ルールにGDPギャップを採用するモデル1がデータとの整合性が高いと評価されたが、周辺尤度から採用されるモデルと推定結果の解釈上の整合性が高いモデルとの間に齟齬があるように思われる。考えられる原因の一つは金融政策ルールの妥当性である。日本に関する実証研究ではGDPギャップを用いたテイラー・ルールの当てはまりがあまり高くはないことが知られている。こうした観点からDSGEモデルによる日本経済の推定では成長率ルールを用いるものも多く、先験的にモデルを選択することも一定の合理性があるかもしれない。考えられるもう一つの原因はモデルの規模である。本論文で用いたモデルは観測変数が3つの小規模モデルであった。そのため資本財への投資需要や政府支出の変動、為替レートの変動の対外取引への影響といったマクロ経済の主要変動要因を取り込んでいない。こうした変数をモデルに取り込むことにより、より正確な推定が可能となるだろう。

中央銀行等の政策分析に用いられるモデルは観測変数が10数個におよぶ中規模モデルが主流となっており、上記のような問題点からも本論文で用いた小規模ニューケインジアン・モデルは、詳細な政策分析の目的には必

ずしも十分な規模のモデルとは言えない。こうした拡張による分析は、今後の課題としたい。

## 注

- 1) 本論文で用いた標準的なニューケインジアンDSGEモデルは比較的小規模なモデルであり、現在では、賃金や資本蓄積および政府支出等より多くの変数と摩擦を含んだChristiano, Eichenbaum and Evans (2005)、およびそれにもとづいて推計を行ったSmets and Wouters (2003) がより一般的となっている。Fueki et al. (2010) は後者を日本経済に合わせて拡張したモデルを用いて潜在GDPの推計を行っている。
- 2) Justiniano and Primiceri (2008) は、価格が伸縮的かつすべての市場が競争的な場合のGDPを「効率GDP」、価格は伸縮的だが市場は競争的ではない場合のGDPを「自然GDP」と分けている。この場合、効率GDPを潜在GDPとすることにより、GDPギャップを厚生経済学の基本定理が成り立つ状態からの乖離と定義することができる。
- 3) モデルによっては実質貨幣需要を効用関数に含める定式化もあるが、家計の実質貨幣需要はモデルの動学経路に影響を及ぼさないため、本論文では省略した。
- 4) 消費の習慣形成には乗法型習慣形成モデルと加法型習慣形成モデルがある。本研究では乗法型を用いた。加法型を用いた研究としてChristiano他 (2005) などがある。
- 5) モデルによっては、企業を最終財企業と中間財企業に分類せず、すべての企業が最終財を生産しており、家計の効用が無数の最終財からなる合成財の消費量に依存するという設定を用いる場合もある。加藤 (2006) などを参照。
- 6) インフレ率の反応係数が  $\phi_{\pi} > 1$  をみたすことをテイラー原理と呼び、合理的期待解の一意性が保証されるための条件となる。しかしClarida他 (2000) は、テイラー・ルールに金利ラグが入っている場合、テイラー原理がみたされなくても一意な均衡動学経路が得られることを示した。
- 7) 線形合理的期待モデルの他の解法としてBlanchard and Kahn (1980) があるが、状態変数と制御変数の区別が必要であり、また行列が特異の場合に解くことができない。Sims (2002) は予測誤差を導入することで、行列が特異でも解ける点、また状態変数と制御変数の区別なしに解ける点、解が一意でなく非決定の場合も政策関数が得られる点などで優れている。
- 8) 実際の合理的期待均衡解の導出は、Dynareのプログラムを通じてMatlabにより行った。

- 9) 観測データを百分率 (%) 表示とし、年率変換されたものはそのまま用いる研究もある。その場合、観測方程式の中の係数が四半期の場合は100、年率換算データの場合は400となる。藤原・渡部 (2011) 等を参照。ただし、このときは固定係数とモデル内の変数との関係を読み直す必要がある。
- 10) 状態空間モデルが線形でない場合、あるいは攪乱項が非正規分布の場合、カルマン・フィルターは利用できない。矢野 (2009) では粒子フィルターを用いて推定を行っている。
- 11) 季節調整にはX-13ARIMA-SEATSを用いた。実際の計算にはRの「seasonal」パッケージおよび「x13binary」パッケージを利用した。
- 12) 消費税調整には日本銀行の資料「コアCPI消費税調整について」を参照した。
- 13) 藤原一平・渡部敏明 (2011) では、日本経済について成長率の定常性はとくに考慮せず、ゼロ金利期間を除いた1980年第2四半期から1998年第3四半期のデータを用いて推定している。Hirose and Naganuma (2007) では、アメリカ経済について1982年第2四半期から2006年第4四半期までを用いて推定している。

## 参考文献

- 石田良・中澤正彦 (2012) 「GDPギャップの推計誤差の評価」 PRI Discussion Paper Series No.12A-11、財務総合政策研究所。
- 加藤涼 (2006) 『現代マクロ経済学講義—動学的一般均衡モデル入門』 東洋経済新報社。
- 酒巻哲朗 (2009) 「1980年代以降のGDPギャップと潜在成長率について」 深尾京司編『マクロ経済と産業構造』 慶應義塾大学出版会、pp.3-32。
- 萩原淳一郎 (2018) 『基礎からわかる時系列分析』 技術評論社。
- 廣瀬康生 (2012) 『DSGEモデルによるマクロ実証分析の方法』 三菱経済研究所。
- 藤原一平・渡部敏明 (2011) 「マクロ動学一般均衡モデル—サーベイと日本のマクロデータへの応用—」 経済研究、Vol.62、pp.66-93。
- 矢野浩一 (2009) 「流動性の罫の下での動学的確率的な一般均衡モデルと自己組織化状態空間モデリング」 ESRI Discussion Paper No.206、内閣府経済社会総合研究所。
- An, S., and F. Schorfheide (2007) “Bayesian Analysis of DSGE Models,” *Econometric Reviews*, Vol.26, No.2-4, pp.113-172.
- Blanchard, O. J. and Kahn, C. M. (1980) “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations,” *Econometrica*, Vol.48, pp.1305-1311.
- Christiano, L. J., Eichenbaum, M. and Evans, C. (2005) “Nominal Rigidities

- and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy,” *Journal of Political Economy*, Vol.113, No.1, pp.1-45.
- Clarida, R., Gali, J. and Gertler, M. (2000) “Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability: Evidence and Some Theory,” *Quarterly Journal of Economics*, Vol.115, No.1, pp.147-180.
- Fueki, T., I. Fukunaga, H. Ichiue, and T. Shirota (2010) “Measuring Potential Growth with an Estimated DSGE Model of Japan’s Economy,” Bank of Japan Working Paper Series No.10-E-13.
- Hirose, Y. and Naganuma, S. (2007) “Structural Estimation of the Output Gap: A Bayesian DSGE Approach for the U.S. Economy,” Bank of Japan Working Paper Series No.07-E-24.
- Justiniano, A., and G. Primiceri (2008) “Potential and Natural Output,” Unpublished manuscript, Federal Reserve Bank of Chicago.
- Sims, C. A. (2002) “Solving Linear Rational Expectations Models,” *Computational Economics*, Vol.20, No.1-2, pp.1-20.
- Smets, F. and Wouters, R. (2003) “An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area,” *Journal of the European Economic Association*, Vol.1, No.5, pp.1123-1175.
- Sugo, T. and Ueda, K. (2008) “Estimating a Dynamic Stochastic General Equilibrium Model for Japan,” *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol.22, No.4, pp.476-502.
- Walsh, C. (2010) *Monetary Theory and Policy*, Cambridge, MA: MIT Press.
- Woodford, M. (2003) *Interest and PricES: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton, NJ: Princeton University Press.