

# 空間概念を形成する指導に関する一考察

— 立方体の展開・切断を通して —

岩田 俊義

A Study on Spatial Concept Development  
— via the unravelling and the cutting of a cube —

Toshiyoshi IWATA

キーワード：空間 図形

## 1. はじめに

中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会（第43回）において、算数・数学科の現状と課題、改善の方向性（検討素案）が次のように示されている。【現状と課題】2. 課題として、算数的活動・数学的活動については、数量や図形についての作業的活動や体験的活動などを取り入れる授業が学校現場において次第に増えてきているが、より多くの実践例を工夫したり、活動のねらいをより明確にしたりすることが必要である。【改善の方向性】4. 数量や図形についての豊かな感覚の育成について、例として、小学校では、身の回りの量を実際に測定したり、図形を構成したりする作業的・体験的な活動を取り入れるなどして、量の大きさや図形についての感覚を育成することを重視してはどうか、また、中学校では、空間図形の学習において、例えば、立体の模型を作り、触れ、分解するなどの作業的・体験的な活動を取り入れるなどして、空間概念を養うこととしてはどうかとの指摘がある。

現状の小中学校での指導内容をみると、次の通りである。

【小学校学習指導要領における立体図形の扱い】

＜第2学年＞

C 図形（1）ものの形についての観察や構成などの活動を通して、図形を構成する要素に着目し、図形について理解できるようにする。

ウ 箱の形をしたものについて知ること。

＜第3学年＞

C 図形（1）図形についての観察や構成などの活動を通して、図形を構成する要素に着目し、図形について理解出来るようにする。

ウ 円、球について知ること。また、それらの中心、半径、直径について知ること。

＜第4学年＞

C 図形（2）図形についての観察や構成などの活動を通して、立体図形について理解できるようにする。

ア 立方体、直方体について知ること。

イ 直方体に関連して、直線や平面の平行や垂直の関係について理解すること。

＜第5学年＞

C 図形 (2) 図形についての観察や構成などの活動を通して、立体図形について理解できるようにすること。

ア 角柱や円柱について知ること。

【中学校学習指導要領における立体図形（空間図形）の扱い】

＜第1学年＞

B 図形 (2) 観察、操作や実験などの活動を通して、空間図形についての理解を深めるとともに、図形の計量についての能力を伸ばす。

ア 空間における直線や平面の位置関係をしること。

イ 空間図形を直線や平面図形の運動によって構成されるものととらえたり、空間図形を平面上に表現して、平面上の表現から空間図形の性質を読み取ったりすること。

ウ 扇形の弧の長さや面積並びに基本的な柱体、錐体及び球の表面積と体積を求めること。

以上を踏まえ、中学校第1学年の図形領域における学習指導について、空間図形における指導では、空間図形の基礎的概念や性質についての理解を深め、それらを活用する力を伸ばす学習を進めなければならない。そこで、基礎的概念の理解を更に深めるため、空間概念形成のための教材を扱うことが望まれる。

空間概念形成のための教材として、立方体の切断を取り上げたい。それは、異なる面に

存在する辺の長さの関係や辺と辺との関係、また、辺と辺とでつくる角の大きさなどを考え、切断面がどんな形になるのかについて、数学的に推論して説明する活動が1学年の図形領域の目標の「図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに、論理的に考察し表現する能力を培う。」ことになると考えるからである。

さらに、それらを通して、第2学年以降における論理的な考察と論証及びそれを表現することへの関心と意欲を高め、平面図形の基本的な作図や図形の移動、空間図形の展開などの幾何学的な操作を通して、図形の性質の根底にある本質的なものを見抜く直感力を養い、その性質を論理的に考察し、表現する能力を培うことに繋がっていくと考える。

しかし、立方体の切断面については、発展教材として扱われているように教材として扱う場合は、十分に配慮しながら指導する必要がある。導入段階や思考段階において、生徒が課題を正しく理解できるように具体物（木枠モデル）を使うなどして工夫したり、追及していく中で、模型を使って、実際に確かめたりすることが必要となってくる。

立方体の切断は、生徒にとっては、難しい教材である。しかし、空間概念を深める教材としては、とても有効ではないかと考えられる。それは、切断面がどのような図形になるかを考えるためには、その図形を構成している辺や角の大きさや関係について、着目し、考えなければならないからである。ここに空間概念を形成する教材としての要因があると考えられる。

空間図形の指導は、従来、指導計画として、学年末に位置付けられ、他の学習内容に時間をとられ、必要と感じながらも軽微に扱ってきている実態がある。立方体の切断においても課題学習的な扱いで、プラスチックで作られた立方体に水を入れて、水の量と容器の傾きにより色々な切断面ができる様子を生徒に見せる程度にとどまっていたのではないか。この様な状況の中では、空間概念が形成されるとは思えない。

そこで、立方体のモデル（木枠）を作り、操作しながら切断面を考えていく時間を確保していきたい。その過程において、その都度、必要に応じて、展開図も取り入れ、平面上での見取り図と具体物としてのモデルを対比させながら切断面を考えていくことが空間概念育成の一助になるのではないかと考える。

## 2. 指導法及び課題

### (1) 一般的指導法と課題

前述したように、時間的確保が困難な中で、立方体の切断を取り扱う場合の指導は、指導者がモデルを示しながら、説明した後、平面上に表された立方体の見取り図において平面での切り口（切断面）を考えていくものが一般的である。

そして、次のような課題を考えていく。

#### 【課題】

立方体を1つの平面で切断するとき、切り口の形は、どのようになるだろうか。また、何故そうなるのか考え、説明しよう。

見取り図に描いた直線から図形（切断面）

を予想するのは、簡単ではなく、作図は、正確に出来ても、図形（切断面）を特定するところではまずく場合が多く出てくる。そこで、見た目だけで判断せずに、立方体の持つ図形の性質に戻って考えるよう示唆することが重要である。

#### ① 見取り図に切り口の形（切断面）

を書き入れ、何故その形になるのか理由を考える。模型を使って正しいかどうか検討する。

#### ② 予想される生徒の反応

三角形（正三角形、二等辺三角形等）

四角形（正方形、台形、ひし形等）

五角形・六角形等

#### ③ 既習の性質を使って説明する。

立方体の切断面の種類は、いくつかあり、立方体の面や辺の長さや角度、平行や垂直の関係に着目することによって、形の種類を説明していく。

次に、立方体の切断面は、平面であり、その平面は、同一直線上にない3点を与えれば決定するので、次のように、立方体の辺や頂点に3点を取り、切断面を考えていくことになる。（ただし、立方体における各面は、同じ正方形で、その上に3点をとっても無意味なので、同じ正方形上には、3点をとらないようにする。）

#### 【例題】

次の立方体で、(ア)、(イ)のように、3点を通る平面で切断したとき、切断面はどんな形になるだろうか。

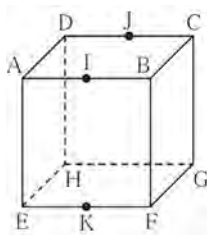
(ア) 3点 I、J、K（各辺の中点）

(イ) 3点 A、D、F

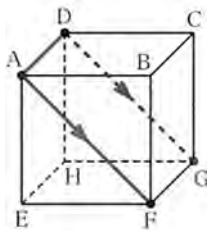
見取り図の上で考えていくと、次のように誤った考え方が多く出てくる。

(ア) 3点を結び、三角形IKJが切断面であると考え生徒が出てくる。つまり、線分JKは、立体の中を通過して、切断面としては、不十分であり、切り口の線ではないことに気付かない。(立方体を2つに切断することはできない。)

立方体の辺は、立方体の面に沿っている、切断面の辺が立方体の内側にあることはおかしいと気付かないことがある。



(イ) 3点A D F を結んで、三角形になると考えてしまう。4つ目の点Gを通ることに気付かない場合が多い。



このように考える場合、面を通る直線は、切断できるが、立方体の中(内部)を通過してしまう直線は、切断できないことを認識する必要がある。そのために、切断できる(立方体の内部を直線が通過しない)ように、どこかに補助の点を考える必要性が出てくる。

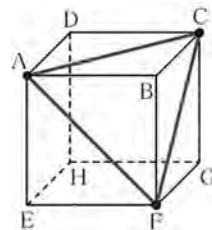
木枠を使ったモデルで考えた場合、内部を通る線(ヒモ)をとらえ、切り口としての平面を延ばすことにより、立方体の面まで拡張することは、容易に理解できるようになる。

## (2) 指導の実際

### 【課題】

次の立方体で、それぞれ3点を通る平面で切断したとき、それぞれの切断面はどんな形になるだろうか。根拠も考えよう。

【例1】 3点A、F、C を通る平面で、切断するときの切断面を考えよう。

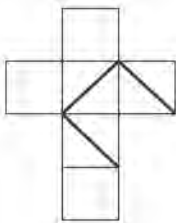


＜考え方＞切断面が正三角形になることは、辺AC、辺AF、辺FCが等しいことから説明することができる。(それぞれ、正方形の対角線)

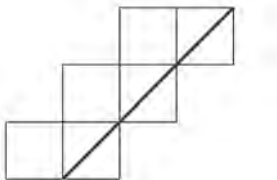
# ◇展開図の活用

展開図による立方体の切断面を考えると、3点A、F、Cを結んでできる切断面は、次の展開図のように表される。このとき、切断面が正三角形、正六角形の場合、展開図上で一直線となることがわかる。(展開図2)

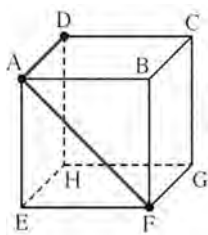
(ア) 展開図1



(イ) 展開図2



【例2】3点 A、F、D を通る平面で、切断するときの切断面を考えよう。

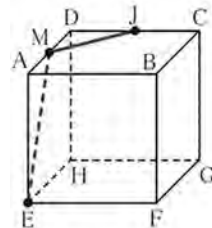


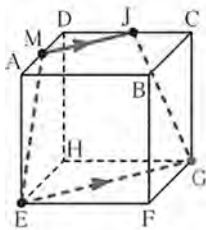
＜考え方＞切断面が長方形になることは、2組の向かい合う辺が等しく、4つの角が等しいことから説明できる。

前述のように、3点A、F、Dを結んで三角形になると考える生徒も出てくる。この場合、4つ目の点Gを通ることに気付かないことが多い。線分DFは、立方体の内部にあり、面を通っていないので立方体を2つに切断することができない。

三角形AFDは、切断面ではないことを確認したい。線分DFを含む平面を拡張し、線分DGを決定する。

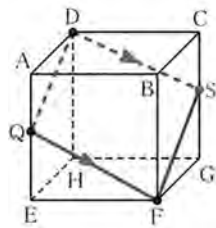
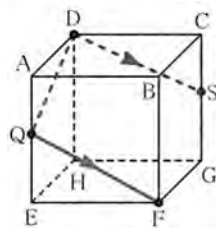
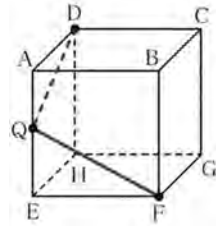
【例3】3点 M、E、J を通る平面で、切断するときの切断面を考えよう。(点M、点Jは、それぞれ、辺AD、辺CDの中点)





＜考え方＞切断面が等脚台形になることは、1組の向かい合う辺が平行で辺  $ME$  と辺  $JG$  が等しいことを確かめれば説明することができる。辺  $MJ$  と辺  $EG$  が平行であることは、2つの辺が面  $ABCD$ 、面  $EFGH$  に含まれていて、2つの面が平行であることを理由とする生徒が多数である。ここで、面が平行であるとき、面に含まれる線分が平行であると言えるかどうか考える必要がある。例えば、辺  $EG$  と辺  $DB$  が平行な面に含まれているが、平行ではなく、ねじれの位置の関係になっている。また、辺  $MJ$  と辺  $EG$  がねじれの位置の関係にあるときは、切断面が平面にならず、面自体がねじれた曲面になる。ここでは、辺  $EG$  と辺  $AC$  が平行で、辺  $AC$  と辺  $MJ$  が平行だから辺  $EG$  と辺  $MJ$  が平行となることを確認する。

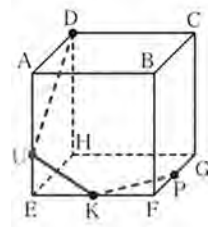
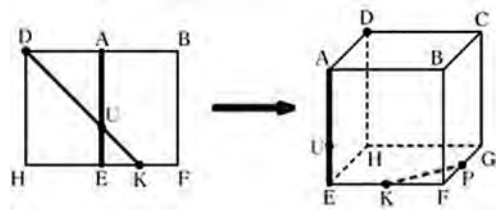
【例 4】 3 点  $D$ 、 $Q$ 、 $F$  を通る平面で、切断するときの切断面を考えよう。  
(点  $Q$  は、辺  $AE$  の中点)



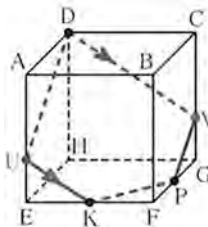
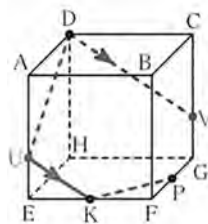
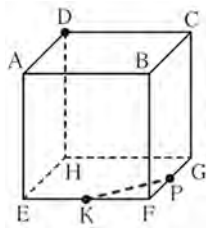
＜考え方＞切断面がひし形になることは、辺  $DQ$  と辺  $QF$ 、辺  $FS$ 、辺  $SD$  が等しいことを確かめれば説明することができる。三角形  $DAQ$  と三角形  $FEQ$ 、三

角形 FGS、三角形 DCS は、同じ三角形（直角を挟む 2 辺の大きさが、正方形の 1 辺とその半分の大きさ）であることから、対応する辺の長さ、 $DQ = QF = FS = SD$  を説明し、辺の長さに着目することで、ひし形であるとした。このとき、四角形 DQFS の対角線 DF と QS の長さに着目し、 $QS = AC = DB$  で、点 B を点 F まで移動させたときに、線分 DF の方が線分 DB より長くなるから、 $DF > QS (= DB)$  となり、4 つの辺が等しく、2 本の対角線の長さが等しくないので、正方形でなく、ひし形であると考ええる。

辺 AE 上の点 U が決定される。



- 【例 5】 3 点 D、K、P を通る平面で、  
切断するときの切断面を考えよう。  
(点 K、点 P は、それぞれ辺 EF、  
辺 FG の中点)



#### ◇展開図の活用①

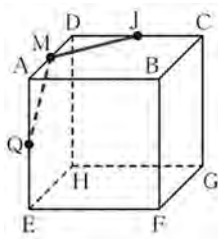
辺 AE を共有する面 DAEH と面 AEFB を展開し、点 D から点 K に直線を引くことにより、

＜考え方＞ 3 点の中で、同一平面上にあ



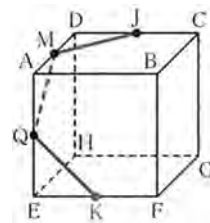
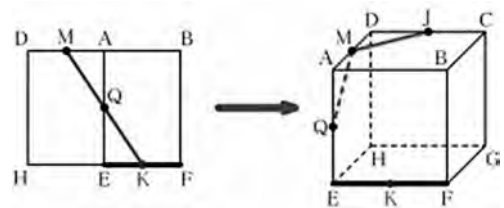
る点は、点Kと点Pである。この2点を結ぶ辺KPは、切断面の切り口の1辺であるが他の2点を結ぶ辺DKと辺DPは、立方体の内部にあるので、切り口の辺とはならない。木枠モデルにおいて、三角形DKPを基に、面を延長する形で、線分DKと線分DPが立方体の辺AE及び辺CGと交わる点を決めることになる。辺AEとの交点を求めるには、展開図の活用が有効な手段となる。すなわち、展開図の活用①のように、点Dと点Kを直線で結び、辺AEとの交点Uが決まる。したがって、辺DU及び辺UKが切り口の辺となる。同様に、展開図において、点Dと点Pを直線で結び、辺CGとの交点Vが決定する。辺PV及び辺DVが切り口の辺となる。したがって、与えられた3点と新たに求められた2点を順に結び、五角形DUKPVが切断面となることが説明できる。

【例6】3点 M、Q、Jを通る平面で、切断するときの切断面を考えよう。  
(点M、点Q、点Jは、それぞれ辺DA、辺AE、辺CDの中点)

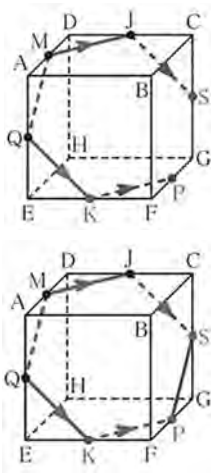


#### ◇展開図の活用②

辺AEを共有する面DAEHと面AEFBを展開し、辺ADの中点Mと辺EFの中点Kを直線で結ぶことにより、辺AE上の中点Qを通ることがわかる。面ABCDと面EFGHが平行だから辺FGの中点P及び面DHGCと面BFGCを展開し、辺CDの中点Jと辺FGの中点Pを直線で結ぶことにより、辺CG上の中点Sを通ることがわかる。







＜考え方＞ 3点の中で、同一直線上にある点は、点Mと点Q、点Mと点Jである。この2点を結ぶ辺MQ及び辺MJは、それぞれ切断面の切り口の1辺であるが、2点Q、Jを結ぶ辺QJは、立方体の内部にあるので、切り口の辺とはならない。木枠モデルにおいて、三角形MQJを基に、面を延長する形で、切り口となる辺を求めていく。展開図の活用②のように、点Mと点Qを直線で結び、その延長線と辺EFとの交点Kが決まる。2辺、MQとQKは、切断面の切り口の辺となる。次に、面ABCDと面EFGHは、平行だから、点Kを通して、辺MJと平行な線分KPを引く。同様に、辺QKと平行な線分JSを引く。最後に、点Pと点Sを結ぶ。これらを

順に結ぶと正六角形MQKPSTができ、切断面となることが説明できる。

### 3. 考察とまとめ

立方体の切断について、一般的指導法及び指導の実際を考えてきたが、まとめてみると、これらの事象は、「立方体は、切断する位置によって、切断面がそれぞれ異なる」ことを正しく理解し、切断面における辺や面の位置関係について、筋道を立てて、説明できるようにすることをねらいとしている。

すなわち、これが中学一年における空間図形を指導するねらいである。

平面上に描かれた立方体がある条件のもとに切断したら、その切断面は、どのような形になるだろうか予想を立て、その予想が正しいかどうか、実際に模型（木枠モデル）を使って検証していく。これを繰り返すことにより、その過程を通して、次第に模型（木枠モデル）を実際に使わずに、切断面をイメージすることができるようになってくる。

平面上に描かれた立方体に、切断面を描くとき（想像）と実際に模型（木枠モデル）を使って、具体的に見えてくる切断面の違いについて、きちんと確認していくことが大切である。

さらに、発展課題として、「立方体の切断において、何故、七角形や八角形等の多角形は、できないのだろうか」と考えさせることができる。考え方としては、今まで学習してきた事象について、模型（木枠モデル）を活用しながら振り返らせることで、立方体の切断面の各辺は、必ず立方体のいずれかの面を通っていて、かつ、切り口は、1つの面に1辺以

上はでてこないことに気付く。つまり、立方体の面は、六面だから最大で六角形しか現れず、七角形以上の多角形は、切断面として現れないことが理解できる。

このように、空間内での平面、直線、点の位置関係をきちんとイメージすることができるようになることで、空間概念の形成が図られていくものであると考えられる。

#### 【参考・引用文献】

- ・ 文部科学省 中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会（第43回）「算数・数学科の現状と課題 改善の方向性（検討素案）」
- ・ 文部科学省 中学校学習指導要領解説数学編（2008）教育出版
- ・ 東京都教育委員会「発展的な学習を推進するための指導資料」（中学校編）平成24年3月
- ・ 園田博人・竹下知行・熊倉啓之「数学的に推論する力を養う指導に関する研究（2）」  
静岡大学教育実践総合センター紀要（2006, 3）
- ・ 岡崎弘志著「立方体の切断—立方模型を使って—」（数学教室 No 537）