

[論文]

S・E・トゥールミンにみる argumentation の 意味とその数学教育上の意義

証明の構想の過程に焦点を当てて

辻山 洋介

The Meaning of Argumentation from Stephen E. Toulmin's Perspective and its Values in Mathematics Education: Focusing on Planning Processes of Proofs

Yosuke TSUJIYAMA

Mathematical educators recently place much emphasis on the necessity of cultivating students' ability in problem solving and problem posing. Particularly, concerning proof and proving, they pay attention to planning proofs and focus on argumentation to capture students' processes of planning proofs. In previous studies, in comparison with frequent use of Toulmin's model to analyze students' processes in a descriptive manner, theoretical consideration of the normative meaning of argumentation is rather overlooked. Toward the learning and teaching of planning proofs, this paper deliberates the meaning of argumentation and discusses its values in capturing students' probable thinking during processes of planning proofs. First, this paper examines in detail the practical meaning and function of probability based on Toulmin's original study, *The uses of argument* (Toulmin, 1958/2003), and identifies the meaning of argumentation from Toulmin's perspective. Subsequently, this paper characterizes processes of planning proofs from the argumentative perspective and dis-

cusses its values in mathematics education from two standpoints owing to peculiarity of the identified meaning as compared with existing related studies.

1. 研究の意図と目的

近年の学校教育では、課題について構想を立て、実践し、評価・改善することなど、知識・技能の活用を図る学習活動の充実が叫ばれており、この種の活動を通じて、課題を解決するために必要な能力を育成することが求められている。数学教育においても、平成20年改訂の学習指導要領において数学的活動の充実が叫ばれるとともに、『中学校学習指導要領解説数学編』において、数学的活動の典型的な過程が「疑問や問いの発生、その定式化による問題設定、問題の理解、解決の計画、実行、検討及び新たな疑問や問い、推測などの発生と問題の定式化と続く」と明示的に述べられた（文部科学省、2008, p. 52）。

この過程は、次期改訂に向けた中央教育審議会での議論においても、「資質・能力の育成のために重視すべき学習過程」の例として提示され、現在検討が進められている（教育課程部会 算数・数学ワーキンググループ、2016）。解決の実行ばかりではなく、解決の構想や計画を立てたり、評価・改善したりする過程が、今後ますます重要となると考えられる。

中学校数学科の内容の一つである「証明」においては、この過程が顕著に強調されている。特に、証明を書くことの指導において、証明の構想や方針を立て、評価・改善することを大切することが新たに述べられている（文部科学省、2008, p. 95）。

この動向に呼応するように、研究上も証明の構想が考察対象とされるようになった（宮崎、2007；辻山、2011）。その中で、証明の構想における生徒の不確実な考えに焦点を当て、科学哲学者 S・E・トゥールミンの「論（arguments）のレイアウト」⁽¹⁾（Toulmin, 1958/2003）を援用し、argumentation の視点から証明の構想の過程を分析する研究が行われている

(例えば Knipping, 2008)。argumentation とは、簡単に述べれば、不確実な論を立てたり検討し合ったりする営みであり、論は、証明だけでなく日常的に他者に行う正当化を含む。そのため、argumentation に着目することにより、証明という結果に表れる形式や論理よりも広い視点から、証明の構想の過程が分析されている。

従来、argumentation に着目した証明研究においては、argumentation と証明の関係について二種類の対立的な捉え方がなされていた。第一は、両者の間にはギャップがあり、argumentation は証明を生成する際の障害になるという捉えであり、第二は、両者の間には連続性があり、argumentation は証明の生成につながるという捉えである。この従来の動向に対し、トゥールミンの「論のレイアウト」の援用によって、対立的な二分を乗り越え、より詳細な分析が可能になった。例えば、argumentation と証明の間の構造的な連続性は、証明の生成における困難の要因になってしまう可能性などが実証的に指摘されている (Pedemonte, 2007)。このように、argumentation と証明の関係が実際にどのようなものであるかを分析するために、「論のレイアウト」は有効なツールとして用いられてきた。

他方、先行研究では、既存の学習指導を経験した生徒を対象に調査を行い、「論のレイアウト」を用いて実際の活動を記述することを主としている。言い換えれば、argumentation の概念自体については理論的な検討が十分になされておらず、argumentation とはそもそも何であり、どのように取り組む営みであるのかが明らかにされていない。学習指導の改善を目指し、不確実な考えをいかして証明の構想に取り組む力を生徒が身に付けられるような学習指導を考案するためには、まずもって argumentation のあり方を理論的に明らかにしなければならない。そのためには、トゥールミンの研究に立ち返り、「論のレイアウト」を提案する前提として、トゥールミンが argumentation をどのように捉えていたのかを明らかにする必要がある。

以上から、本研究は、トゥールミンの研究における argumentation の意味を特定した上で、証明の構想の過程に焦点を当て、その数学教育上

の意義を明らかにすることを目的とする。

2. 研究の方法

トゥールミンが「論のレイアウト」を提案したのは、著書 *The uses of argument* (Toulmin, 1958/2003) の第Ⅲ章においてである。同書において、トゥールミンは、argumentation の本性を考察しているが、その概念規定は明示的に述べていない。そのため、研究内容を具体的に解釈することにより、argumentation の意味を特定する必要がある。

トゥールミンは、まず第Ⅰ章「論の場と様相」において、「できない」などの様相語が実際の論の使用においてどのように機能するのかを具体的な場面に即して考察し、様相語を含む論の力 (force) と基準が、場に依存せず不変であるのか、あるいは場に依存して異なるのかを分析した。次に、第Ⅱ章「蓋然性 (probability)」において、第Ⅰ章の考察を通じて明らかとなった様相語の実践的な機能と先行研究の検討に基づき、様相語の中でも特に、「おそらく」などの蓋然性を表す様相語が、実際の論の使用においてどのように機能するのかを考察した。以上が、蓋然的な論を使用する営みを示す概念である argumentation を、蓋然性を表す様相語の機能によって特徴付けている箇所である。

そして、第Ⅰ・Ⅱ章の考察をもとに、第Ⅲ章「論のレイアウト」において、人が実際に蓋然的な論を使用する際に直面する状況やその状況において必要な行為に言及しながら、論に必要な構成要素を分析し、構造化した。

このように、argumentation に関するトゥールミンの研究は、論の実際の使用における蓋然性の意味と機能を考察した第Ⅰ・Ⅱ章と、その考察をもとに、論に必要な要素を「論のレイアウト」として構造化した第Ⅲ章とに大別することができる。したがって、トゥールミンが argumentation をどのように捉えていたのかを明らかにするために、本研究は第Ⅰ・Ⅱ章を具体的に解釈する (第3節)。

その上で、証明の構想の過程に焦点を当て、argumentation の数学教育上の意義を明らかにする。「意義」には、「意味」と「物事が他との連関において持つ価値・重要さ」という二つの側面がある（新村編、2008, p. 133）。第一の側面である「意味」は、証明の構想において argumentation はどのような営みであるかを示す。この考察を第4節(1)で行う。

第二の側面である「他との連関において持つ価値・重要さ」については、argumentation の視点から証明の構想を捉えた場合と、他の視点から捉えた場合とを比較し、前者の価値や重要さを指摘する必要がある。そのため、第4節(1)において考察する証明の構想における argumentation の意味を、他の先行研究において捉えられてきた側面と比較することによって、argumentation の重要性を明らかにする。この考察を第4節(2)において行う。

3. トールミンの研究にみる argumentation の意味

本節では、トールミンの研究にみる argumentation の意味を特定する。特定に先立って、(1)において、トールミンの研究の背景と特徴を概観する。次に、(2)において、研究の背景を考慮しながら、*The uses of argument* の第 I・II 章の内容を具体的に解釈することにより、論の使用における蓋然性の意味と機能を明らかにする。以上をもとに、(3)において argumentation の意味を特定する。

(1) トールミンの研究の背景と特徴

トールミンは、研究目的の設定にあたって、論理学の問題をその内側から捉えるのではなく、科学や日常生活などにおいて論理学が実際に用いられる姿を注視する立場をとった。具体的には、論理学が「実際にどのように応用されるのか、そして、日常生活において我々が論 (arguments) の健全さや力や確かさを評価する際に、実際に用いる規範や方法とどのような関係をもつのか」(Toulmin, 1958/2003, p. 2) を問題とした。

このようにトゥールミンが実際に論を用いる行為を中心に据えたのは、当時の論理学に対する批判からであった。トゥールミンは当時の論理学について、「論理学は自己完結する方向に、実践的な問いから遠ざかってしまう方向に発展してきた」(前掲書、p. 2) と述べ、論理学を形式的科学として矮小化しようとするアプローチを痛烈に批判した。具体的には、論理学を心理学、社会学、技術、純粋数学に帰着しようとするアプローチを一つひとつ吟味し、いずれも袋小路に陥ってしまうことを論証した。このうち、トゥールミンが「惹かれるものがある」(前掲書、p. 5) と述べた技術的なアプローチに関する指摘に、トゥールミンの立場が鮮明に現れている。

我々が学校で学ぶ計算の方法は推論の技法としてうまく機能し、計算結果は論理的な研究や批判に支配されている。もし、論理学の規則が現実に応用されるのはなぜなのかと問われるならば、次のことを思い出すことが有用である。‘論理的あるいは非論理的であるのは、世界ではなくむしろ人 (men) である。論理への適合性は、論の行為あるいはその行為者の功績であり、論じられている事柄に本来的な従順さが備わっていることを示すのではない。’ そのため、論理がなぜ世界に適合するのかという問いは、その形では提起されない。’ …… (中略) …… 論理学の関心は、我々の推論の作法 (*manner*) や技術 (*technique*) にあるのではない：論理学の主たる仕事は、回顧的であり、正当化に役立つものである。(Toulmin, 1958/2003, pp. 5-6, 斜字体と引用符は原文、下線は引用者による。以下断りのない限り同様の表記を用いる)

下線部に顕著にみられるように、トゥールミンは、論理学の対象は既に定式化された結果ではなく、人やその行為であると捉えた。そして、引用箇所最後の一文を言い換える形で、論理学の関心は本来「主張を擁護するために我々が提示する申し立て (*case*) のようなもの」(前掲書、p. 7) にあるとした。この認識に基づき、トゥールミンは法学とのアナロジーに着目し、人が実際に論を用いる行為を、主張と批判を中心に据えて特徴付けようと試みたのである。

この立場は、2003年にアップデート版が出版された際の序文において、トゥールミン自身によって改めて述べ直された。トゥールミンが「場に依存せず不変 (field-invariant)」な論の形式として提示した「論のレイアウト」は、原著が出版された1958年以来、トゥールミンの意図とは無関係に「トゥールミンのモデル」と称され、コミュニケーションを記述する枠組みとして用いられてきた。さらに、その文脈において批判もされてきた。このことに対する違和感を表明するとともに、トゥールミンは以下のように述べた。

私が本著を著した際、私のねらいは完全に哲学的なものであった：それは、アングロ・アメリカの学術的な哲学者のほとんどによってつくられた‘どんな意義深い論も、形式的な言葉で置き換えられる’という前提を批判することであった。……(中略)……コミュニケーション学者たちに‘トゥールミンのモデル’と呼ばれるようになったような分析モデルを念頭に置いてはいなかった。……(中略)……コミュニケーション学者のコミュニティに(言わば)‘適用された’ことに対する私のリアクションは、正直に告白すれば、それほど好奇心旺盛なものではなかった。(Toulmin, 1958/2003, pp. vii–viii)

このトゥールミンの立場の特異性は、他分野においても指摘されている。例えば社会哲学において、対話に関する論理学において、トゥールミンの研究が特徴的であったのは以下の点であると指摘されている。それは、トゥールミンが『『真理』なるものが超歴史的な固定したものではなく、あくまで間主観性の所産であり、……(中略)……社会的コンテクストの中で獲得されるものだ』と捉えた上で、次のことを考察した点である。それは、「単に狭い意味での専門家・研究者のレベルでなく、一般大衆の行う『実際の論証』⁽²⁾を念頭に置く」立場をとった上で、「精密科学としての物理学などを科学のモデルと考えた旧来の『論理実証主義』タイプの学派に向け」て、実際的な新しい論理学を提唱したことである(嶋崎、1986, pp. 468–469)。

また、トゥールミンのこの立場は、後の著作においてもみられる。例

えば、クーンとポパーを中心として、パラダイム論をめぐる科学哲学上の論争において著名な「科学哲学国際コロキウム」における講演では、そもそも科学を「通常科学」と「革命的科学」という二つの局面に分ける手法自体を批判した。具体的には、「彼〔註：クーン〕が論じるころによれば、科学的発展の「通常的」局面中と「革命的」局面中とに生じる変化の種類の間違は、知的水準において絶対的である。その結果、彼が与えた説明は、科学理論において実際に生じるいかなるものよりもずっと深くずっと説明しがたい不連続性の存在を含意させることによって、行き過ぎた」と述べた（トゥールミン、1970/1990, p. 64）。その上で、古生物学史上の研究の過程において「通常的」と「激变的（または超自然的）」との区別が瓦解してしまった事例をあげ、二分法自体を批判する立場を表明した（前掲書、pp. 64-65）。日常生活と科学研究との違いはあるものの、人の実際の営みに着目する立場は、*The uses of argument*にも共通する一貫した特徴としてあげられるのである。

以上を総括すると、トゥールミンの研究の背景と特徴は次のように整理される。トゥールミンは、論理学に対する形式的なアプローチを批判し、人が実際に論を用いる行為に焦点を当てた論理学の構築を目指した。そして、法学とのアナロジーに着目することにより、主張と批判を中心に据えて実際の側面から論を用いる行為を捉えた。

(2) トゥールミンの研究における蓋然性の意味と機能

①様相語の力と基準

論の本性をその実際の使用に即して考察するにあたり、トゥールミンは次の二点において考察の焦点を絞った。第一は、手元にある証拠や根拠を用いて、人が他者に主張を正当化する際の論を考察対象とすること、そして、その考察のために、法学とのアナロジーに着目することである（Toulmin, 1958/2003, p. 12）。この点は、(1)で述べたように、論理学の関心は「主張を擁護するために我々が提示する申し立て (*case*) のようなもの」(前掲書、p. 7)にあるという認識に基づいている。

第二は、人が論を使用する際の様式を考察する上で、その様式が論の種類にどの程度変化し得るのか、あるいは変化しないのかを観点とすることである（前掲書、p. 13）。まず、この考察を簡潔に進めるために、トゥールミンは「論理的タイプ」と「場（field）」という二つの用語を導入した。「論理的タイプ」とは、主張やその根拠がどのような種類の問題についてのものであるかを意味し、例えば「現在と過去の出来事の報告、未来についての予測、犯罪の評決、審美的な賞賛、幾何学の公理」などは異なる論理的タイプであり、一つの論が異なる論理的タイプの要素を含む場合もある（前掲書、p. 13）。場とは、「二つの論におけるデータと結論がそれぞれ同じ論理的タイプであるとき、二つの論は同じ場に属すると呼ばれる」と定義される（前掲書、p. 14）。これら二つの用語を用い、トゥールミンは研究の問いを次のように述べ直した。

我々が設定した最初の問題は、次の問いに言い換えることができる。‘我々の論の形式と実体に関し、何が場によらず不変 (*field-invariant*) であり、何が場に依存する (*field-dependent*) のか?’ 我々が論を評価する様式、評価する際に参照する基準、論の結論を修正する際の作法に関して、何が場にかかわらず同じ（場に依存せず不変）であるのか、そして、ある場における論から他の場における論に移ったときに、何が変化する（場に依存する）のか？ 例えば、裁判において適切な論の基準と、『王宮協会論文集』で論文を審査する際に適切な基準、あるいは、数学的証明や、テニスのチーム編成の予測に関する基準を、どの程度比較できるのか？ (Toulmin, 1958/2003, pp. 14–15)

この問いに対し、トゥールミンは「cannot（できない・不可能である・あり得ない）」という様相語を使用することが、具体的な場面においてどのような力（force）をもつのかと、その様相語がどのような基準に基づいて使用されるのかを、六つの事例に即して分析した。様相語の力とは、その様相語が実際に含意することを意味する。また、様相語を使用する基準とは、ある文脈においてその様相語の使用が適切であると判断する際に参照する基準を意味する（前掲書、p. 28）。

例えば、トゥールミンは事例の一つとして次をあげた。「禁煙車両において喫煙している乗客がおり、老婦人がタバコの煙の影響により咳をして泣いているのを電車の警備員がみつける。警備員は職権を行使し、その乗客に『あなたはこの車両で喫煙することはできない (cannot)』と言う」(前掲書、p. 26)。cannotを含むこの発言によって、警備員は乗客に喫煙する能力がないことを示唆しているのではない。警備員が示唆しているのは、この車両において喫煙することは規則や条例に反しているため、喫煙したいのであれば別の場所に行くべきであるということである。すなわち、警備員の発言の意味を明示的に述べれば次の通りである。「規則が変わらない限り、あなたはこの車両で喫煙することはできない。もし喫煙するのであれば、規則違反であり、周りの乗客に対し罪を犯すことになる」(前掲書、p. 27)。

このように六つの事例を通じて、トゥールミンは、cannotという様相語の力と基準が、場に依存するの否かを考察した。そして、次の二点を明らかにした。第一は、cannotという様相語を実際に使用することは、「何かは何らかの理由で排除されなければならない」という命令を含意するという力を有し、かつ、この力は場に依存せず不変であるということである。例えば上の事例では、「この車両で喫煙することはできない」と発言することにより、この車両で喫煙する行為を排除している。このように、いかなる場においても cannot は「あることを排除する」という命令を含意すること、それゆえ cannot の力は場に依存せず不変であることをトゥールミンは指摘した (前掲書、pp. 27-28)。

第二は、cannotという様相語を使用することが適切であるかどうかを判断する基準は、場に依存して異なるということである。例えば上の事例では、喫煙することが不適切であるという判断において参照されているのは、法的な規則である。他方、他の五つの事例では、「あなた」の体格、その市役所の座席数、特定の狩猟家の専門用語、性別と血縁関係に関する用語の意味、父親としての倫理観がそれぞれ参照されている。このように、我々が cannot を使用する際には、あることを法的にできない、

倫理的にできないなど、あることを「何かとして (*qua something*)」不適切であり排除されるべきであると説明される。この「何か」の部分が判断の基準を表している (前掲書、pp. 28-29)。

さらにトゥールミンは、以上の二点が、cannotに限らず他の様相語についても一般的に成立することを指摘した。その例として「possible (可能性がある・おそらく)」をあげ、同様にいくつかの事例を分析することにより、様相語の力は場に依存せず不変であることと、様相語を使用する基準は場に依存して異なることを確認した。

いかなる文脈においても、ある提案に‘可能性がある’ためには、その提案がその文脈において (*in that context*) 真正な考察を受ける権利があるという‘資質をもって (*have what it takes*)’ いなければならない。いかなる場においても、‘何々は我々の問いに対する可能性のある答えである’と述べることは、当該の問題の本性を考慮すると、何々という答えは考察に値すると述べることと同じである。‘possible’という言葉の意味のうちこの程度は、場に依存せず不変である。他方、可能性の基準は、不可能性やよさの基準のように、場に依存する。何が可能であることを示すために我々が指摘しなければならないことは、我々の考察している問題が純粋数学における問題なのか、チームの選考に関する問題なのか、美学における問題なのかなどに全面的に依存するであろう。そして、ある立場において何かに可能性があることを示す特徴は、別の立場においては全く無関係な特徴になるであろう。(Toulmin, 1958/2003, p. 34)

以上を総括すると、論の実際の使用における様相語の力と基準に関するトゥールミンの指摘として、次の二点が確認される。第一に、様相語の力は場に依存せず不変であること、第二に、様相語を使用する基準は場に依存して異なることである。

②蓋然性を表す様相語の機能

以上のように、トゥールミンは第I章「論の場と様相」において、様相語の力と基準について、場に依存せず不変であるか、依存して異なるかを考察した。そして、前述の二点は、哲学や論理学における先行研究

において考慮されてこなかったことを確認した（前掲書、pp. 36–40）。その上で、先行研究において盛んに議論されており、かつ論の実際の使用において本質的である蓋然性（probability）へと考察を移した。そして、「おそらく」などの蓋然性を表す様相語が実際の使用において有する機能について、同様の考察を行った（第Ⅱ章「蓋然性」）。以下では、蓋然性を表す様相語を含む論を蓋然的な論、蓋然性を表す様相語を含む主張を蓋然的な主張と、それぞれ表す。

端的に述べれば、第Ⅱ章において、トゥールミンが独自の成果として明らかにしたこととして、次の二種類のことがあげられる。第一は、蓋然的な論が実際に使用される際に、様相語がどのように機能するのかに関することである。第二は、蓋然的な論が評価される際に、その基準がどのように文脈に依存するのかに関することである。これらの二点は、トゥールミンが第Ⅰ章において一般的な様相語について指摘した二点を、蓋然性を表す様相語の場合に適用したものであるとみることができる^③。ここでは第一の点について、次の③では第二の点について述べる。

トゥールミンは「おそらく」などの蓋然性を表す様相語に関し、先行研究においては理論的考察が行われ、一般的かつ抽象的な考察が中心であったことを指摘した。そのため、この種の様相語が実際の使用においてどのように機能しているのかは十分に検討されてこなかったことを問題とした（前掲書、pp. 41–44）。そして、この問題を考察するにあたって、蓋然性を表す様相語が含まれない主張と、含まれる主張とを比較し、それらの主張によって含意されることの違いを分析した。

具体的には、トゥールミンはまず、「SはPである」や「私はAをする」、「Aをすることを私は約束する」、「SがPであることを私は知っている」など、様相語が含まれない主張に関する先行研究を概観した。そして、人はこのような主張を述べることにより、主張に応じた責任を他者に対して負うことを確認した。

次に、トゥールミンはこれらの主張を実際に使用する場面を想定し、その場面で生じる問題を考察した。そして、「Aをすることができないか

もしれない」理由があるにもかかわらず、「Aをすることを私は約束する」などと述べてしまった場合に、他者との間にトラブルが生じることを指摘した（前掲書、pp. 44-46）。そして、このようなトラブルを避けながら主張を述べようとする際に、蓋然性を表す様相語である「おそらく」などが機能することを指摘し、「おそらく」を付して蓋然的に主張を述べることによって含意されることを、次のように述べた。

‘おそらく (probably)’ という言葉の主眼は、‘たぶん (perhaps)’ という言葉と同様に、まさにこのようなトラブルを避ける点にある。‘SがPであることを私は知っている’あるいは‘Aをすることを私は約束する’と述べることにより、私は明白に責任を引き受けている。このことは、‘SはPである’あるいは‘私はAをするに違いない’と述べることによって責任を引き受けるのと同様である——この場合には責任の程度はより低く、暗黙的であるが——。‘おそらくSはPであろう’あるいは‘私はおそらくAをするであろう’と述べることにより、全面的に責任を引き受けることを私は明白に避けている。そのことにより、何か失敗する結果に対して私は保険をかける。そのことにより、私の発言は‘擁護される (guarded)’ のである。(Toulmin, 1958/2003, p. 46)

このように、トゥールミンは、「おそらく」などを使用することは、主張が誤っていた際に責任を全面的に引き受けることを回避する機能を有することを指摘した。この機能ゆえに、「おそらく」などと擁護しながら主張を述べるのが可能になるのである。

さらに、トゥールミンは、蓋然性を表す様相語がもつこの実際的な機能は、主張の種類にも、SやAやPなどの内容にも依存しないことを、複数の例をもとに指摘した（前掲書、p. 49）。そのため、第I章におけるトゥールミンの言葉を用いれば、この機能は、場に依存せず不変な様相語の力を表していることになる。

さらに、上述のトゥールミンの言及には、蓋然的に主張を述べる人と、述べる対象である他者との関係がみられる。それは、人は蓋然的に主張を述べる前提として、仮に「SはPである」と述べてしまった場合に他者

との間に生じるトラブルを恐れるということである。そのため、蓋然的に主張を述べる人は、他者による批判を想定していることになる。

以上を総括すると、蓋然性を表す様相語の機能に関するトゥールミンの研究成果として、次のことを指摘することができる。それは、蓋然性を表す様相語を人が使用する際には、他者による批判を想定しながら、擁護しながら主張を述べ、擁護した程度において主張に責任をもつことである。

③蓋然的な主張の評価

続いて、トゥールミンは、蓋然的な主張を人が評価する際の基準を考察した。その考察に先立って、上述のように指摘された機能をもとに先行研究を検討し直し、次の二つの問題点を指摘した。第一は蓋然的な主張についてであり、ある主張が「あり得る」と述べることと、「あり得ると思われる」と述べることとの違いが明確に議論されてこなかったことである。第二は蓋然的な主張に要求される根拠についてであり、ある主張を誰がどのような文脈で述べているのかに焦点が当てられてこなかったことである。そして、これらの問題点は「蓋然性というテーマにおいて最も重要である」とした上で、両者を総合して考察を進め、そのうち特に後者に関し独自の知見を見出した（前掲書、p. 52）。

具体的には、まず、「彼は何々を知っていると主張したが、知らなかった」という主張の不適切さの批判と、「彼は何々を知っていると考えていたが、間違っていた」という主張の誤りの批判とを、具体例に即して比較した。そして、それぞれの批判が何によって生じるのかを分析した。後者の批判は主張に反する事実と直面することによって生じるのに対し、前者の批判は「彼」の信頼性あるいは「彼」がその主張に至った根拠を非難するために行われる。すなわち、前者の批判は「もとの主張が行われた限りにおいて主張を批判する役割を果たす」のに対し、後者の批判は「その後の結果を考慮して主張を修正するために行われる」のである（前掲書、pp. 53-54）。

トゥールミンは、この違いが上述の第一の問題点に関連し、「それはあ

り得ると思われた (*seemed*) が、そうではないことが判明した」と「それはあり得ることであった (*was*) が、それに我々は気付かなかった」との間にも同様の違いが存在することを指摘した。その上で、主張に要求される根拠は、主張の批判や評価を行う文脈に応じて異なることを指摘した。そして、時間の経過に伴い、主張がなされた後に起こった出来事や新しい考えに照らして「予想は信頼性のあるものであり続けている (*remains*) のか」という問いが常に問い直される」ことが実践的に重要であることを、複数の例に則して議論した (前掲書、pp. 54-56)。そして、その総括として次のように述べた。

結局、我々の考察していることが予想の信頼性 (*trustworthiness*) であるならば、批判の適切な基準 (予想を支持するために要求することが合理的な根拠) は、その予想がはじめに述べられたときの状況だけでなく、その予想が判断されている状況にも依存すると考えられなければならない。…… (中略) …… ‘私は知っている’、‘彼は知っている’、‘それはあり得る’ という形式の主張に当てはまるのが、‘私は知っていた’、‘彼は知っていた’、‘それはあり得た’ という形式の主張にも必ず当てはまると期待することは無意味である。同様に、出来事が起こる前に考察された主張に当てはまるのが、出来事の結果に照らして考察し直された主張にも必ず当てはまると期待することもまた、無意味である。この種の主張を永遠の相の下に (*sub specie aeternitatis*)、すなわち ‘時間外から’ 評価したり判断したりすることはできない。(Toulmin, 1958/2003, p. 57)

このように、蓋然的な主張を評価する基準は、どのような文脈に即して評価するかによって異なることをトゥールミンは指摘した。第 I 章の言葉を用いれば、蓋然的な論を評価する際の基準は、場に依存して異なることを指摘したのである。

さらに、評価の基準に関するトゥールミンの言及には他者性が考慮されているが、その内容は② (他者の批判の想定) とは異なる。それは、自身あるいは他者が、蓋然的な主張を時間の経過に即して評価することにより、主張の信頼性が確認し直されたり、主張が修正されたりすること

である。そのため、論を評価するには、②のように他者の批判を想定することに加え、他者との間で実際に相互作用を行うことを含意している。

以上を総括すると、蓋然的な主張の評価に関するトゥールミンの研究成果として、次のことを指摘することができる。それは、蓋然的な主張を人が実際に評価するには、他者と相互作用しながら、主張の根拠を文脈に即して評価することである。

(3) トゥールミンの研究にみる argumentation の意味

これまでに整理した、論の実際の使用における蓋然性の意味と機能に関するトゥールミンの研究をもとに、argumentation の概念を規定する。

まず、argumentation における蓋然性の意味を確認する。(2)①で述べたように、証拠や根拠を用いて人が論を使用するのは、主張を他者に正当化するためである。その際に蓋然性を表す様相語を使用するのは、②で述べたように、他者に対して負う責任を擁護しながら主張を述べるためである。そのため、蓋然的である対象は、まずもって述べたい主張である。さらに、③で述べたように、時間の経過に伴い新たな出来事や証拠に即して主張の再確認や修正が必要となる。したがって、蓋然的である対象には、主張だけでなく、その主張を正当化するために用いられる証拠や根拠などの論も含まれる。

次に、argumentation において、蓋然性を考慮しながら、人は何をするのかを確認する。②は論を立てて主張を正当化すること、③は論を評価することを表している。両者の関係に関し、③においては、評価を通じて主張や論を修正することが含意されている。そのため、両者は段階的に推移するのではなく行き来を伴う。

さらに、argumentation における他者性の意味を確認する。②においては他者の批判を想定することが、③においては他者と実際に相互作用することが含まれる。そのため、他者を想定しながら個人で行う相互作用と、実際に他者で行う相互作用の両者が含まれる。

以上を総括することにより、argumentation の概念を次のように規定することができる。

「他者と相互作用しながら、蓋然的であっても、擁護しながら論を立てること、並びに文脈に即して論を評価することにより、主張を正当化すること」

前述のように、この概念規定において、「他者と相互作用しながら」は、他者の批判を想定しながら個人内で行う相互作用と、実際に他者と集団で行う相互作用とを含む。「蓋然的であっても」は、「論を立てること」、「論を評価すること」、「主張を正当化すること」のいずれにもかかる。さらに、「論を立てること」と「評価すること」は、必ずしもこの順で一方的に取り組みられるのではなく、行き来しながら取り組まれる。

4. 証明の構想における argumentation の意義

本節では、前述の概念規定をもとに、証明の構想における argumentation の意義を明らかにする。この考察は仮想的な過程に即して行う。すなわち、生徒や教師による実際の証明の構想ではなく、証明の構想と argumentation に関する理論的考察を反映した、仮想的な事例に則して考察を行う。事例においては、図1の問題アを例とする。

問題アは、学校数学において「証明」という用語が導入される中学校第二学年の図形領域において、証明の意味や仕組み、三角形の合同条件などを学習した後に扱われる。具体的には、平行四辺形の辺や角に関する性質を証明し、「平行四辺形の対角線はそれぞれの midpoint で交わる」を証

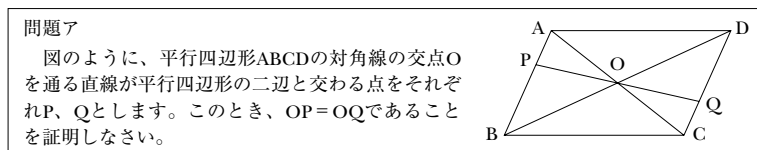


図1 問題ア

明した直後に学習する。表現や扱いに若干の違いはあるが、現在出版されているすべての教科書に掲載されている。

問題Aの特徴として、次の二点があげられる。第一に、問題Aには合同な三角形の組と、等しい辺や角の組が多く含まれるため、生徒はそれらの中から適切な組を選択する必要がある。第二に、学校数学における証明問題に特有な「図のように」という言葉を含み、問題の意味を検討することが必要な問題である。本稿での考察は第一の特徴に関連する。

(1) 証明の構想における argumentation の意味

証明の構想は、「事柄の真であることを示すために利用可能な要素や要素間の関連を予想すること」である (Tsujiyama & Yui, in press)。証明の構想における argumentation の意味の考察に先立って、argumentation と証明の構想との対応を概説する。argumentation において中心的な活動は、蓋然的であっても「擁護しながら論を立てること」と「文脈に即して論を評価すること」である。これらの両者の間には行き来があるとは言え、後者においては、評価の対象となる論が既に既に立てられていることが前提となる。すなわち、前者に一旦は取り組んでいることを前提に、後者に取り組むことになる。

同様に、証明の構想は、証明の構成や証明の振り返りと相互に関連しながら取り組まれる。これらの三者の間には行き来があるとは言え、証明の構想に一旦は取り組んでいることを前提に、証明の構成や証明の振り返りに取り組む (辻山, 2011)。

以上から、argumentation において中心的な活動のうち、証明の構想と「擁護しながら論を立てること」が対応し、証明の構成と証明の振り返りには「文脈に即して論を評価すること」が対応する。したがって、本節では、argumentation において中心的な活動のうち「擁護しながら論を立てること」に焦点を当てて、証明の構想を捉える。

証明の構想の目的は、「事柄の真であることを示すため」である。このことに対応して、argumentation の目的は、「主張を正当化すること」で

ある。「主張」は、証明の構想において「事柄の真であること」に相当する。

argumentationの目的をさらに詳細にみると、主張が「蓋然的であっても」なお正当化することに特徴がある。この特徴からみると、証明の構想における主張である「事柄の真であること」は、この時点では蓋然的であること、すなわち、この時点では事柄が本当に真であるかどうかは不明であるという側面や、当初に推測された事柄が証明の構想において修正される可能性があるという側面がより鮮明となる。

証明の構想における中心的な活動は、事柄が真であることを示すために「利用可能な要素や要素間の関連を予想すること」である。上述のように、このことに対応するのが、argumentationにおける「蓋然的であっても、擁護しながら論を立てること」である。

まず、証明の構想における「利用可能な要素や要素間の関連」が、argumentationにおける「論」に対応する。argumentationにおいては、論が「蓋然的であっても」立てることに特徴がある。論が「蓋然的であることは、証明の構想において予想した「要素や要素間の関連」は、あくまで予想であり、実際に利用できるとは限らないことに対応する。すなわち、事柄の真であることを示すために、実際に利用できるかどうか「蓋然的」である。

さらに、「擁護しながら」論を立てることは、「おそらく」などを付して蓋然的であることを明示しながら、証拠や根拠を提示することである。この提示は、「他者と相互作用しながら」論を立てることによって行われる。他者を想定しながら個人で行う場合、他の生徒や教師から批判を受ける可能性を想定し、無用な批判を受けないように擁護する。他者と実際に相互作用しながら行う場合には、他の生徒や教師からの指摘を受けた後に、その指摘から論を擁護し、可能な範囲で論をいかせる余地を残す。

したがって、証明の構想において、argumentationは「他者と相互作用しながら、事柄の真偽が不明であっても、その事柄の真であることを示

すために予想した要素や要素間の関連を、実際に利用可能であるかどうかは不明であっても擁護しながら提示する」営みであると捉えられる。

例えば、問題アの証明の構想において、ある生徒（生徒*i*とする）が、辺や角の相等などを図にかき込むことを通じて、以前に証明した「平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる」（事柄ウとする）を利用できるのではないかと予想したとする。次いで、事柄ウの証明において $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ を利用した経験から、問題アでも利用できるのではないかと予想したとする。そして、「 $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ 」によって「 $OA = OC$ 」などを導くことができることに気付いた状況を想定する。

この状況において、証明の構想における「事柄の真であることを示すために実際に利用可能であるかどうかは不明であっても、予想した要素や要素間の関連を提示する」ことは、事柄ウや $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ 、 $OA = OC$ などの要素を提示することに相当する（図2）。

さらに、「他者と相互作用しながら」と「擁護しながら」については、他者を想定して個人で行う場合と、実際に他者で行う場合がある。個人の場合、図2に対する他の生徒や教師の反応を意識し、結論である $OP = OQ$ を直ちに示すことはできないことに気付き、批判を受ける可能性を想定したとする。このときに、「 $OP = OQ$ を示せるかどうかはわからない」と明示したり、 $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ に着目した意図を補足したりして、図2のように考える理由を付記することに相当する（図3）。

実際に他者で行う場合、まず、生徒*i*とは別の生徒（生徒*ii*とする）が、次のように考えたとする。まず、結論である $OP = OQ$ を示すためには、 OP と OQ を辺にもつ $\triangle OPB$ と $\triangle OQD$ が合同であることを示せばよいのではないかと考える。 $\triangle OPB \equiv \triangle OQD$ を示すためには、 $\angle OBP = \angle ODQ$, $\angle OPB = \angle OQD$, $\angle POB = \angle QOD$ を利用できるのではないかと予想する。しかし、三つの角の相等によって $\triangle OPB \equiv \triangle OQD$ を示すことはできないことに気付く。そのため、他の生徒や教師から、 $\triangle OPB \equiv \triangle OQD$ が成立するかどうか不明であることを批判される可能性を想定する。批判を避けるために、 $\triangle OPB \equiv \triangle OQD$ が成立するかどうか不明であるこ

$\triangle AOB \equiv \triangle COD$ を利用できそうである。
 次のことが成り立つ。
 $AB = CD, OA = OC, OB = OD, \angle AOB = \angle COD,$
 $\angle OAB = \angle OCD, \angle OBA = \angle ODC$

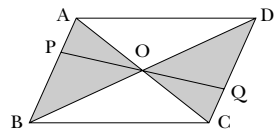


図 2 証明の構想における立論1-a(生徒 i)

事柄ウ (平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる) の証明において、 $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ を利用した。同様に、 $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ を利用できるのではないかと。ただし、これから結論の $OP = OQ$ を示せるかどうかはわからない。

図 3 証明の構想における立論1-b(生徒 i)

$OP = OQ$ を導くためには、 OP と OQ を辺にもつ三角形が合同になることを示せばよい。そのような三角形として、 $\triangle OPB$ と $\triangle OQD$ に着目する。
 $\triangle OPB$ と $\triangle OQD$ において、次が成り立つ。
 $\angle OBP = \angle ODQ, \angle OPB = \angle OQD, \angle POB = \angle QOD$

※これらによって $\triangle OPB \equiv \triangle OQD$ を示すことはできないため、この考えを利用できるかどうかはわからない。

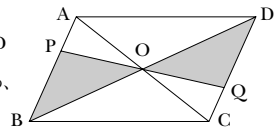


図 4 証明の構想における立論2(生徒 ii)

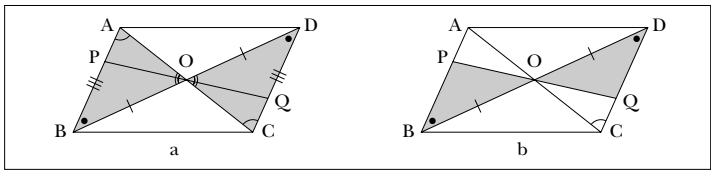


図 5 証明の構想における立論3(生徒 i と生徒 ii による相互作用)

とと、 $\triangle OPB \equiv \triangle OQD$ に着目する理由を明示しようと考えた結果、図 4 を提示したことを想定する。

そして、生徒 i が図 2 と図 3 を、生徒 ii が図 4 をそれぞれ提示し、両者が実際に相互作用しながら取り組む場合を想定する。生徒 i は、生徒 ii の論を参照することにより、自身が既にみつけている図 2 の六つの要素 (図 5-a) のうち、 $OB = OD$ と $\angle OBP = \angle ODQ$ が、図 3 の $\triangle OPB$ と $\triangle OQD$ においても成立することを確認できる (図 5-b)。このことにより、 $\triangle OPB$ と $\triangle OQD$ が一辺両端角相等をみたすための他の要素として、

$\angle POB = \angle QOD$ を予想することが可能になる。

生徒 ii の場合には、図 2 を参照することにより、事柄ウ（平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる）を利用することや、 $OB = OD$ が成立することを確認できる。これらの要素によって、以前には示すことができなかった $\triangle OPB \equiv \triangle OQD$ を示すことができる。このように、両者が互いの考えを参照しながら、利用可能な要素の予想を進めることが可能になる。

(2) 証明の構想における argumentation の重要性

前述のように、argumentation を視点とすると、証明の構想において「事柄の真偽が不明であっても」その事柄の真であることを示そうとする部分と、予想した要素や要素間の関連を「実際に利用可能であるかどうかは不明であっても擁護しながら」提示する部分とが明確に捉えられる。これらの二つの部分を捉えることの重要性を、先行研究との比較を通じて明らかにする。

① 真偽の不明な事柄を真であるとみること

事柄の真であることは証明によって示される。そのため、生徒は証明の構想に、事柄が本当に真であるかどうかはわからない状態で行き詰ることになる。argumentation を視点とすることにより、この「事柄の真偽が不明であっても」、その事柄の真であることを示そうとするという側面が強調される。この側面は、先行研究において明示的には特徴付けられてこなかった。

証明の構想においては、帰納や類比、アブダクション、図や数の例に則した考えなど、様々な推論が行われることが従来から指摘されてきた。中でも、前述の側面に深く関係する推論として、結論から仮定に向かって推論を行う「解析的な方法」があげられる。

解析的な方法は、証明指導において長らく重要視されてきた（例えば黒田、1927; Polya, 1957/2004; 清水、1994; 宮崎、2007）。解析的な方法に着目した先行研究においては、証明を発見する方法を指導するという教育的

な意図をもとに、結論を示すためには何が成立すればよいのかを逆向きに考えるという側面が強調されてきた(辻山、2011)。言い換えれば、一般的な問題解決のストラテジーとしての「逆向きの考え」を証明問題に適用した方法であるという側面が強調され、「結論が成立するとみる」という側面に、明示的には焦点が当てられてこなかった。近年では、後者の側面に相当する特徴に着目して「解析」の基礎的考察もされている(小林、2014)が、真偽の不明な問題に用いるという学習者の意識性は、明示的には考慮されていない。

前述の「事柄の真偽が不明であっても」という側面により、この解析的な方法を用いる前提が明瞭になる。それは、「結論が実際に成立するかどうかは不明である」にもかかわらず、その結論が成立するとみた上で、その結論を示す要素を探ることである。

例えば、(1)の例において、生徒は「 $OP = OQ$ を導くためには、 OP と OQ を辺にもつ三角形が合同になることを示せばよい」と考えている(図4)。他方、この時点では証明を生成していないため、結論である $OP = OQ$ が成立するかどうかはわからない。そのため、このように考える前提として、「結論である $OP = OQ$ は成立するはずである」とみる必要があるのである。argumentationを視点とすることによって、逆向きに考える前提として必要なこの意識を顕在化することが可能になる。

なお、この見方は、解析的な方法の元である「解析」には備わっている。解析的な方法は、数学の研究において、命題や証明を自ら発見するための方法として重要視されてきた「解析」が、生徒に適した証明の発見法として捉え直されたものである。そのために「解析“的”」と呼ばれているものと思われる(辻山、2011)。このように捉え直された過程で、「解析」が本来もつ「結論が実際に成立するかどうかは不明であっても、成立するとみる」という見方が薄れてしまったのであると考えられる。この傾向は、先行研究においては、証明問題が肯定的に解決されることが想定されていることによると思われる。すなわち、解析的な方法を用いて証明する事柄は真であることが想定されている。対照的に、「解析」

はそもそも、真偽の不明な証明問題や、解の存在が不明な決定問題に対して行う方法であった。そして、事柄の真偽と証明、あるいは解の存在とその解とを同時に発見するという機能をもっていた (Jones, 1986)。

このように、argumentation を視点とすることによって、事柄の真偽が不明であるという生徒の意識を考慮して、証明の構想の過程における解析的な方法の実際のはたらきを捉え直すことが可能になる。すなわち、事柄の真偽が不明であるにもかかわらず、事柄の結論が成立するとみた上で、結論を示すためには何が成立すればよいのかと考えることである。

②利用可能であるかは不明であっても擁護しながら提示すること

証明の構想において予想した要素や関連は、あくまでも予想である。そのため、予想した要素や関連を利用して実際に証明を生成できるかどうかは、証明の構想の時点では不明である。同主旨のことは、argumentation に着目した先行研究 (例えば Pedemonte, 2007) においても、また論理に着目した研究 (例えば Heinze ら、2008) においても指摘されている。上述の argumentation の概念規定をもとにすると、この特徴がより強調されるとともに、「擁護しながら」論を立てるという新たな側面が特徴付けられる。

予想した要素を「擁護しながら」提示することは、その要素が蓋然的であることを明示したり、蓋然的であってもその要素に固執する理由を補足したりすることを意味する。例えば、図4のように、 $\triangle OPB \equiv \triangle OQD$ という要素を擁護するために、「これらによって $\triangle OPB \equiv \triangle OQD$ を示すことはできないため、この考えを利用できるかどうかはわからない」と明示したり、「 $OP = OQ$ を導くためには、 OP と OQ を辺にもつ三角形が合同になることを示せばよい。そのような三角形として、 $\triangle OPB$ と $\triangle OQD$ に着目する」と補足したりすることである。このように、予想した要素を擁護しながら提示することは、先行研究においては十分に焦点が当てられてこなかった。

部分的には、このことに関連する事例が報告されている。宮崎 (2007) は、ある生徒が証明を生成した後、証明の構想を振り返る活動を報告

している。「四角形 ABCD で $AB = AD$ 、 $BC = DC$ のとき、 $\angle ABC = \angle ADC$ を証明しよう」という問題において、生徒 T は「フローチャート」を用いて証明を生成した。その後、証明をよんだ他の生徒が「これじゃ、どうして、この三角形の合同に気づいたのかわからないよね」と指摘した。そして、生徒 T は「AC 上に補助線をひく。すると、 $\triangle ADC$ と $\triangle ABC$ ができる」とその三角形の合同に着目した過程の記述を加えたことを報告している（宮崎、2007, p. 653）。他者との実際の相互作用を通じて、証明の構想において $\triangle ADC \equiv \triangle ABC$ という要素に着目した理由を加えた例であると考えられる。

このように、ある要素に着目する理由や、その着想を得た動機を説明することは、証明の構想の方法の学習において重要であると考えられる。同趣旨のことを、清水（1994）は教材研究において指摘している。清水は、証明の構想の立て方の指導について、「子どもの実態を見ていると、三角形の合同条件は知っていても証明で活用することのできないものが多いようである。これは証明の構想の立て方についての指導が不十分なためではなかろうか」と述べた。そして、「平行四辺形において2組の対辺は等しい」を例として、「対角線 AC をひく」や「図6」⁽⁴⁾ といった助言を教師がはじめから与え、生徒に考えさせていないことを問題とした。そして、「証明の構想の立て方を指導する際に最も大切なことは、『なぜ対角線 AC が入用か』、『なぜ図6で考えるのか』を自覚できるようにすることである」と述べた（清水、1994, p. 229）。

さらに、清水は近年の論説において、「自分の考えを他者に受け入れてもらうために必要」な問いとして、「根拠となることを明らかにしそれに基づいて述べること（第一の『なぜ』）」とともに、「着想や方法に気付いた

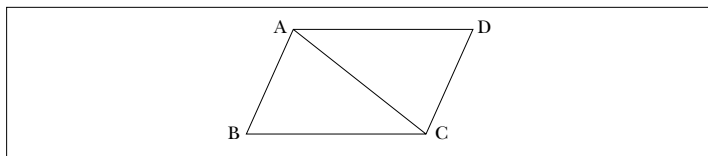


図 6 証明の構想における着想の顕在化の重要性(清水、1994, p. 229)

きっかけや動機を明らかにすること（第二の『なぜ』）」を指摘した（清水、2008, p. 18）。証明は第一の「なぜ」に、要素に着目した理由の説明は第二の「なぜ」に対する答えである。したがって、argumentationを視点として、予想した要素を「擁護しながら」提示することに注目することにより、第二の「なぜ」に答える活動の実現につながることを期待される。

このように、argumentationを視点とすることによって、証明の構想において予想した要素を「実際に利用可能であるかどうかは不明であっても擁護しながら」提示する部分が捉えられる。このことにより、先行研究が部分的に指摘してきた点をより明瞭に反映させ、証明の構想の学習指導を考案していけることが期待される。

5. 研究のまとめと今後の課題

本研究は、トゥールミンの研究における argumentation の意味を特定した上で、証明の構想の過程に焦点を当て、その数学教育上の意義を明らかにすることを目的とした。まず、著書 *The uses of argument* の内容を具体的に解釈し、トゥールミンの研究における蓋然性の意味と機能を明らかにした。そして、argumentation を「他者と相互作用しながら、蓋然的であっても、擁護しながら論を立てること、並びに文脈に即して論を評価することにより、主張を正当化すること」と規定した。

次に、証明の構想における argumentation の意味を考察した上で、その意味を、他の先行研究において捉えられてきた証明の構想の側面と比較することによって、argumentation の重要性を明らかにした。そして、証明の構想における argumentation の意義として、証明の構想の過程における次の二つの過程を顕在化することが可能になることを指摘した。第一は、事柄が実際に真であるか偽であるかが不明であるにもかかわらず、一旦は真であるとみて、真であることを示そうとする過程である。第二は、実際に利用可能であるかは不明であっても、予想した要素や要素間の関連を擁護しながら提示し、それらの要素や要素間の関連に着目

する理由や動機を説明する過程である。

本研究の意義と課題として、次を指摘することができる。本研究は、先行研究では十分に行われてこなかった argumentation 概念に関する理論的な検討を行った。この検討の意義として、生徒の実際の活動がどのようなものであるかを説明することを超え、学習指導をどのように行うべきかを考案することにつながるという点を指摘することができる。他方、本稿では文献解釈に考察を限定したため、学習指導の考察には至っていない。今後は理論的考察と実践的考察を総合し、学習指導の考察を進めることが必要である。

その際には、argumentation を視点としたからこそ顕在化が可能になるとして第4章で提示した二つの過程が、実際の学習指導においてどのように実現できるのかを考察しなければならない。その考察にあたっては、本稿では考察対象外としたカリキュラムや発達段階などを考慮する必要があると考えられる。

[付記] 本研究は、JSPS 科研費 (No. 23330255, 24243077, 26282039, 26780504) の助成を受けて行われた。

(注)

- (1) 「論のレイアウト」の詳細やそれと証明の構成との関係については、辻山 (2012) を参照されたい。
- (2) 嶋崎 (1986) では argument の訳語として「論証」を用いている。本研究では「論」を用いている。
- (3) 第 I・II 章の対応に、トゥールミンが明示的に言及しているわけではない。
- (4) 清水 (1994) の原文では図 10 である。

(引用・参考文献)

Heinze, A., Cheng, Y-H., Ufer, S., Lin, F-L., & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40 (3), 443–453.

Jones, A. (1986). *Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection Part 1: Introduction, text, and translation*. (translated from the transcription of the Vaticanus). New York, NY: Springer-Verlag.

Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40

- (3), 427–441.
- 小林徹也 (2014). 「結論が得られたとし仮定との関係を求める『解析』の方向と機能に関する検討」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 68 (3), 11–20.
- 黒田稔 (1927). 『數學教授の新思潮』. 東京：培風館.
- 教育課程部会 算数・数学ワーキンググループ (2016). 「資質・能力の三つの柱に沿った、小・中・高を通じて算数・数学において育成すべき資質・能力の整理(案)」. 教育課程部会 算数・数学ワーキンググループ (第3回) 2月15日配付資料, http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/siryu/1367186.htm (2016年2月29日確認)
- 宮崎樹夫 (2007). 「学校数学における証明に関する研究：証明の学習の諸相に着目して」. 『日本数学教育学会 第40回数学教育論文発表会論文集』 (pp. 649–654).
- 文部科学省 (2008). 『中学校学習指導要領解説 数学編』. 東京：教育出版.
- 新村出 (編) (2008). 『広辞苑 第六版』. 東京：岩波書店.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66 (1), 23–41.
- Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method (second edition)*, New Jersey, NJ: Princeton University Press. (Original work published 1957)
- 嶋崎隆 (1986). 「立証の構造について：『トールミン図式』を中心にして」. 『一橋論叢』, 95 (3), 467–475.
- 清水静海 (1994). 「論証」. 中学校数学科教育実践講座刊行会 (編), 『CRECER 中学校数学科教育実践講座 第6巻 図形と論証』 (pp. 204–236), 東京：ニチブン.
- 清水静海 (2008). 「知識・技能の活用で高める言語活動」. 『中等教育資料 平成20年5月号』 (pp. 14–19), 東京：ぎょうせい.
- Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument (updated edition)*, Cambridge: Cambridge University Press (Original work published 1958).
- トールミン, S. E. (1990). 「通常科学と革命的科学との区別は妥当であるか」(森博訳). 森博 (監訳), 『批判と知識の成長』 (pp. 59–69), 東京：木鐸社. (原著：Does the distinction between normal and revolutionary science hold water? In I. Lakatos & A. Musgrave, Eds., 1970, *Criticism and growth of knowledge*, pp. 39–47, Cambridge: Cambridge University Press)
- 辻山洋介 (2011). 「学校数学における証明の構想の意義に関する研究」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 95, 29–44.
- 辻山洋介 (2012). 「学校数学の証明の構成における蓋然的な論の検討の方法：argumentationを視点として」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, 36 (4), 340–355.
- Tsujiyama, Y., & Yui, K. (in press). Use of examples of unsuccessful arguments to facilitate students' reflection on their proving processes, In Kaiser, G. (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*.