

Rationing hyperbolic preferences without inconsistency: The special case of addiction

和田 良子

要 約

人々が、遠い将来を小さく割引き、近い将来を大きく割引くような時間選好率をもつとき、hyperbolic preference を持つといわれる。彼らは必然的にある時点で自らの選好の逆転に直面し、動学的不一致に陥るという問題を抱えている。本稿は、動学的不一致に陥っていないにもかかわらず、その消費経路が、あたかも hyperbolic preference を持っているようにみえるケースを示す。すなわち Uzawa 型の Recursive な効用関数を持ち、いわゆる良い嗜癖に陥っているケースにおいて、定常状態の近傍に向かう間は高い時間選好率を持つが、定常状態ではもはや割引率が一定となるため、その人の消費パスが、動学的に一致しているにもかかわらず hyperbolic preference のようにみえるケースを示す。

1. 序論

家計の動学問題を考えるとき、その時間選好率を一定とすることがほとんどである。その仮定によって家計の time-consistent な（動学的に一致した）選択が約束されるからである。家計の瞬時的な割引率が生涯を通じて一定であると仮定し、時間を連続と捉えたと、割引ファクターの期間構造は、exponential になることが知られている。これに対して、実際には動

物や人々は、遠い将来の大きい報酬よりも、すぐ近い将来の小さい報酬を好むという報告が Ainslie などの行動心理学者によってなされてきた。Ainslie は人々や動物の割引率の期間構造は exponential であるというよりもむしろ hyperbolic (双曲線的) であると報告している。このような人々の選好を hyperbolic preference といい、近い将来は exponential な割引率よりも大きく割り引く一方で、遠い将来は exponential な割引率よりも小さく割り引くような期間構造をもっている。

hyperbolic preference の期間構造を数値化したのは、Lowenstein and Prelec (1992) である。その定義によれば、今から τ 期先のできごとは、次の割引関数によって割り引かれる。

$$\phi(\tau) = (1 + a\tau)^{-\gamma/a} \quad a, \gamma > 0$$

この式は、stationarity を被ることによって導出されている。

hyperbolic preference は、preference reversal を説明する理論として注目されてきた。なぜなら hyperbolic preference を持つ人は最初に多く消費し、あとは少なく消費する計画をたてる。ところが時間がたって、最初に消費計画を立てたときには少なく消費するはずであった時期（例えば若い時には老後と考えていた時期）になってみると、その時点が現在であるため、また大きく近い将来を割り引くことになり、最初の計画を破ることが予想される。hyperbolic preference は、異時点間での自己管理ができないということを意味しているのである。すなわち hyperbolic preference は必然的に time-inconsistent (動学的に不一致) となることが考えられる。このため hyperbolic preference は myopic の一種であると考えられ、人々の非合理性と同義なものと捉えられている。

時間選好率に hyperbolic preference を持つ人の消費計画は、人生の初期に多く消費し、あとで少なく消費するというものである。しかし、このような消費経路は、必ずしも stationarity を被らなくてもおこり得る。

例えば Asfar (1999) は、hyperbolic preference が必ずしも人々の動学的不一致を意味しないケースを示した。それは、人々が将来の支払いの受け取りについて不確実性を感じているとき、受け取れない可能性の分だけ前倒しに消費するが、時間がたつにつれて、支払いが受け取れない確率をベイジアン流に更新するため、徐々に将来の割引率を下げるというものである。消費計画の元になっている割引率の期間構造は hyperbolic preference の特徴を示しているが、人々はその計画を守ることができ、動学的に不一致であるということはない例である。

本稿の目的は、Recursive であり合理的嗜癖を持つ特別なケースにおいて消費経路およびその時間選好率が hyperbolic preference に陥っているように見えるものの、動学的不一致ではない例を示すことである。このときには定常状態の近傍での時間選好率の時間の進行によるふるまいは、hyperbolic になるものの、人々は自分の計画を守るため、動学的に一致することになる。

II. 内性的な時間選好率をもつ合理的嗜癖モデル

II-1 モデルの設定

何らかの嗜癖を持っているような個人の目的関数を、Becker and Murphy [1988] に沿って次のように定義する。²⁾

$$W = \int_0^{\infty} U(c_t, s_t) e^{-\delta t} dt \quad (1)$$

$$\dot{s} = c_t - ds_t \quad (2)$$

ここで添え字の t は時間を表す。 c は嗜癖財、 s は嗜癖財のストックである。 d は嗜癖財の償却率を示す。また U は個人の瞬間的な効用関数であり、

$$U_c > 0 \quad U_s > 0 \quad U_{cc} < 0 \quad U_{ss} < 0 \quad (3)$$

を仮定する。また z と c について効用関数は分離可能であるが、 c と s は分離可能でないとする。また c が嗜僻財であることの必要条件から

$$U_{cs} = U_{sc} > 0 \quad (4)$$

と仮定する。なお t 以外の下付き文字はその変数による偏微係数を示す。

個人は期初の保有資産はをもつて生まれ、嗜僻財のみを購入する。毎期ごとには貯蓄・借入れが生じることがあるが、生涯を通じては貯蓄をしないものと仮定する。貯蓄・借入れをするときの利子率は r で与えられるとする。この個人の予算制約式は、

$$a_0 = \int_0^{\infty} e^{-rt} (y_t + p_t c_t) dt \quad (5)$$

本モデルでは、Uzawa型効用関数を仮定する。すなわち、時間選好率 δ が現在の効用水準に依存して内性的に決まると仮定する。

$$\dot{\delta} = \rho(U(c_t, s_t)) \quad (6)$$

δ は個人の時間選好率を表し、 $\rho(\cdot)$ はその時間選好率関数である。時間選好率関数は、今期の効用の大きさに依存し、Uzawa [1968] にならって $\rho(\cdot)$ は次のような性質を持つと仮定する。時間選好率 δ は、生涯消費から今期の消費を減らし、将来消費にあてるときの効用の比率から 1 を除いたものであるから、それが大きいほど将来を割り引かないことを示している。

$$\rho > 0 \quad \rho_U > 0 \quad \rho_{UU} > 0 \quad \rho - U\rho_U > 0 \quad (7)$$

(7) 式の 2 番目と 3 番目の条件は、瞬時的な効用の上昇は、将来の効用との限界代替率を高め、そのスピードはだんだん速くなっていくことを示し

ている。これは現在の効用の高さが将来の効用の低下を補えるためである。最後の条件は、瞬間的な効用関数 U の上昇によって全体的な効用 W が高まるための条件を示している。³⁾

II-2 最大化条件

個人の直面する問題は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \max \quad & W = \int_0^{\infty} U(c_t, s_t) e^{-\delta t} dt \\ \text{subject to} \quad & \dot{s} = c_t - ds_t \\ & a_0 = \int_0^{\infty} e^{-rt} (y_t + p_t c_t) dt \\ & \dot{\delta} = \rho(U(c_t, s_t)) \end{aligned} \quad (8)$$

ハミルトニアンは、

$$H = U(c_t, s_t) + \tilde{\pi} e^{-\gamma t} (a_0 / e^{-\gamma t} - p_t c_t) + \tilde{\gamma} (c_t - dS_t) + \tilde{\beta} \rho(U(c_t, s_t)) \quad (9)$$

$\tilde{\gamma}$ と $\tilde{\beta}$ は共役変数、 $\tilde{\pi}$ はラグランジュ乗数である。個人の最大化問題は(9)式を最大化することである。なお以下下付きの添え字 t を省略する。

最大化の一階の条件は以下のようなになる

$H_c = 0$ より、

$$U_c (1 + \tilde{\beta} \rho_U) = \tilde{\pi} e^{-\gamma t} p - \tilde{\gamma} \quad (10)$$

オイラー方程式は以下のようなになる。

$$\dot{\tilde{\gamma}} = -\frac{\partial H}{\partial S} \quad \text{より} \quad \dot{\tilde{\gamma}} = d\tilde{\gamma} - (1 + \tilde{\beta} \rho_U) U_s = 0 \quad (11)$$

$$\dot{\tilde{\beta}} = -\frac{\partial H}{\partial \delta} \quad \text{より} \quad \dot{\tilde{\beta}} = \rho \tilde{\beta} + U \quad (12)$$

横断面条件は、次のようになる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_t \tilde{\gamma}_t e^{-\delta t} = 0 \quad (13)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_t \tilde{\beta}_t e^{-\delta t} = 0 \quad (14)$$

ここで、ラグランジュアンおよび共益変数について γ 、 β 、 π を以下のように定義する。

$$\tilde{\gamma} \equiv \gamma e^{-\delta t} \quad \tilde{\beta} \equiv \beta e^{-\delta t} \quad \pi \equiv \pi e^{-\delta t}$$

$\tilde{\gamma}$ と $\tilde{\beta}$ は共益変数であることより、時間 t で微分して以下の2つの関係式が得られる。

$$\dot{\gamma} = \dot{\tilde{\gamma}} e^{-\delta t} + \tilde{\gamma} \dot{\delta} e^{-\delta t} \quad \dot{\beta} = \dot{\tilde{\beta}} e^{-\delta t} + \tilde{\beta} \dot{\delta} e^{-\delta t} \quad (15)$$

共役変数 β は本稿で重要な役割を担うので、その特徴をみておこう。(13) 式を時点 τ から ∞ まで積分すると、収束経路上で $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t e^{-\delta t} = 0$ であることから、 $\beta_t = -\int_{\tau}^{\infty} U e^{-\delta t} dt$ を得る。したがって、収束経路上で共役変数 β は定常状態における生涯の効用 W にマイナスをかけたものに等しくなる。

(15) 式および、 γ 、 β 、 π の定義式を用いると、現在価値ハミルトニアンは次のようになる。

$$H = U(c, s) + \pi e^{-\gamma t} (a_0 / e^{-\gamma t} - pc) + \gamma (c - dS) + \beta \rho (U(c, s)) \quad (9)'$$

個人の最大化問題は、 c 、 s 、 β を動かして (9)' 式を最大化することになる。

$$M(c, s, \beta) = H(c, s, \gamma, \beta)$$

一階の条件は、

$$U_c (1 + \beta \rho_U) = \pi e^{-\gamma t} p - \gamma \quad (10)'$$

オイラー方程式は

$$\dot{\gamma} = (\rho + d) \gamma - (1 + \beta \rho_U) U_s \quad (12)'$$

$$\dot{\beta} = \rho \beta + U \quad (13)'$$

(10)' 式を c についてといて、

$$c = c(s, \beta, \gamma) \quad (16)$$

$$\text{where } \frac{\partial c}{\partial \beta} = -\frac{U_c \rho_U}{a_{cc}} = c_\beta \quad \frac{\partial c}{\partial \gamma} = -\frac{1}{a_{cc}} = c_\gamma$$

$$\text{ただし } a_{cc} = U_{cc} (1 + \beta \rho_U) + U_s^2 \beta \rho_U$$

$$\text{よって } c_\beta = U_c \rho_U c_\gamma$$

$$(2) \text{ より } c = \dot{s} + ds \quad \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{a_{cs}}{a_{cc}} = a_{cs} c_\gamma = c_s \text{ とする}$$

$$\text{ただし } a_{cs} = U_{cs} (1 + \beta \rho_U) + U_c U_s \beta \rho_{UU}$$

よってこのモデルの微分方程式体系は以下のように与えられる。

$$\dot{c} = c_s \dot{s} + c_\gamma \dot{\gamma} + c_\beta \dot{\beta} \quad (17)$$

$$= c_s (c - ds) + c_\gamma \{ (\rho + d) \gamma - (1 + \beta \rho_U) U_s \} + c_\beta (\rho \beta + U)$$

$$\dot{s} = c - ds \quad (18)$$

$$\dot{\gamma} = (\rho + d) \gamma - (1 + \beta \rho_U) U_s \quad (19)$$

$$\dot{\beta} = \rho \beta + U(c, s) \quad (20)$$

定常状態では $\dot{c} = 0$, $\dot{s} = 0$, および $\dot{\beta} = 0$ が成立するので、以下の条件が成立している。

$$c^* = ds^* \quad (21)$$

$$\beta^* = -U/\rho^* \quad (22)$$

このとき、 $\dot{\gamma} = 0$ となるので、(23) が成立する。

$$\gamma^* = \frac{(1 + \beta \rho_U)}{(\rho + d)} U_s \quad (23)$$

(21) 式は定常状態において、嗜僻財のストックが消費量の償却率倍になっているという関係を示している。(22) 式で示される β の値は、定常状態で成立する生涯効用に等しくなる。いいかえれば定常状態における瞬間的な効用の割引現在価値にマイナスをかけたものとなる。これは β が時間選好率 ρ の shadow price であることから容易に理解できる。

II-3 比較静学

この節では、(17) から (20) 式の動学方程式の体系を用いて定常状態の近傍で比較静学を行う。

$\dot{c} = 0$ 、 $\dot{s} = 0$ 、 $\dot{\beta} = 0$ の近傍で (17) (18) (20) 式を全微分して行列にまとめると、(28) 式のようにかける。なお以下上付き文字の * で定常状態における変数の値を示す。

一階の条件 (10)' 式から $U_c = (\pi e^{-\gamma t} p - \gamma) / (1 + \beta \rho_U)$ であることに注意して、(17) 式において $\dot{c} = 0$ とおくと、

$$c_s(c - ds) + c_\gamma \{ (d + \rho^*) \gamma - (1 + \beta^* \rho_U) U_s \} + (\rho^* \beta^* + U)(p \pi e^{-\gamma t} - \gamma^*) \rho_U c_\gamma / (1 + \beta^* \rho_U \beta) = 0 \quad (24)$$

$$c^* - ds = 0 \quad (25)$$

$$\rho^* \beta^* + U(c, s) = 0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= c_s + \rho_U c_\gamma U_c (p\pi e^{-\gamma t} - \gamma) + c_\gamma \{ \rho_U \gamma U_c - \beta \rho_{UU} U_c U_s - (1 + \beta \rho_U) U_{cs} \} \\
 &= \rho_U c_\gamma U_c p\pi e^{-\gamma t}
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$A_2 = -dc_s \rho_U c_\gamma U_s (p\pi e^{-\gamma t} - \gamma) + c_\gamma \{ \rho_U \gamma U_s - \beta \rho_{UU} U_s^2 - (1 + \beta \rho_U) U_{ss} \} \tag{29}$$

$$A_3 = \rho_U c_\gamma \rho (p\pi e^{-\gamma t} - \gamma) / (1 + \beta \rho_U) - c_\gamma \rho_U U_s \tag{30}$$

$$W_1 = (\rho \beta^* + U) p\pi e^{-\gamma t} r \tag{31}$$

$$W_2 = -\pi e^{-\gamma t} (\rho \beta^* + U) \tag{32}$$

また定常状態の近傍で評価すると、 $\beta^* = -U/\rho < 0$ で、(8) 式の仮定から、 $1 + \beta \rho_U = (\rho - \rho_U U) / \rho > 0$ であるから、

$$c_\gamma = -1/U_{cc} (1 + \beta \rho_U) + U_c^2 \beta \rho_U > 0 \tag{33}$$

$$c_\beta = \rho_U U_c c_\gamma > 0 \tag{34}$$

c_s は定常状態の近傍では $c = ds$ となることから d に近づく。

(27) の行列式は

$$\begin{aligned}
 \det &= -d\rho c_\gamma \left\{ \frac{1}{d + \rho} \rho_U U_c U_s (1 + \beta \rho_U) \right\} - (1 + \beta \rho_U) \rho_U (U_s^2 + U_c U_s d) + \\
 &\quad (1 + \beta \rho_U) U_{ss} \rho + \beta \rho_{UU} U_c U_s \rho
 \end{aligned} \tag{35}$$

嗜僻財の価格の変化についての比較静学を行う。

$$\frac{dc}{dp} = \frac{1}{C_s} (\rho \beta^* + U) \pi e^{-\gamma t} \tag{36}$$

定常状態の近傍では、 $\beta^* = -U/\rho$ が成立していることから、 $\frac{dc}{dp} = 0$ となって、価格の変化は消費量に変化を与えない。

同様に、金利の変化についての比較静学は以下ようになる

$$\frac{dc}{dr} = \frac{1}{C_s}(\rho\beta^* + U)p\pi e^{-\gamma t} \quad (37)$$

定常状態の近傍では同様に、 $\frac{dc}{dr} = 0$ となってやはり金利の変化は消費量に変化を与えない。

III. 調整経路と安定性

この節では調整経路について分析する。それにより、嗜癖が beneficial なものであるときには、鞍点解が得られ、嗜癖財の消費量が定常状態に近づくにつれて、割引率が低下していくことを示す。

動学方程式 (17) (18) (20) 式を定常状態の近傍で線形近似すると、

$$\begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{s} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & -d & 0 \\ U_c(1 + \beta\rho_U) & U_s(1 + \beta\rho_U) & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c - c^* \\ s - s^* \\ \beta - \beta^* \end{bmatrix} \quad (38)$$

これを次のように表現することができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{c} \\ \dot{s} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} c - c^* \\ s - s^* \\ \beta - \beta^* \end{bmatrix} \quad (39)$$

定常状態で $\rho^*\beta^* + U = 0$ が成り立つ事に注意すると、固有方程式は

$$|I\lambda - A| = \begin{vmatrix} \lambda - A_1 & -A_2 & -A_3 \\ -1 & \lambda + d & \rho_U U_s \\ -U_c(1 + \beta\rho_U) & -U_s(1 + \beta\rho_U) & \lambda - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (40)$$

このとき、固有根を θ_1 とすると、微分方程式の解は、

$$c - c^* = X_{11}e^{\theta_1 t} + X_{12}e^{\theta_2 t} + X_{13}e^{\theta_3 t}$$

$$s - s^* = X_{21}e^{\theta_1 t} + X_{22}e^{\theta_2 t} + X_{23}e^{\theta_3 t}$$

$$\beta - \beta^* = X_{31}e^{\theta_1 t} + X_{32}e^{\theta_2 t} + X_{33}e^{\theta_3 t}$$

X_{1i}, X_{2i}, X_{3i} がみたす条件は、固有方程式 (40) によって知る事ができる。
すなわち、

$$\begin{bmatrix} \theta_i - A_1 & -A_2 & -A_3 \\ -1 & \theta_i + d & 0 \\ -U_c(1 + \beta\rho_U) & -U_s(1 + \beta\rho_U) & \theta_i - \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ X_{3i} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (41)$$

ここで、上記の固有方程式の定数項はAの行列式によって与えられるから、(37) 式より、 $U_s > 0$ のとき、行列式の符号は負である。このとき、解と係数の関係を考えて、このとき、Appendix より、実部が負の固有根はただ1つである。

$U_s < 0$ のときは 行列式がマイナスになることは保証されない。このとき固有根の実部は3つとも正となるか、虚数根が共益でその積は常に正になることから、1つが正で2つが負の重根になる。

このとき、 $t \rightarrow \infty$ とともに実部が正の固有根は、発散するから、実部が負の固有根のみに注目する。これを θ_1 とすると、(42) 式の2行目より、

$$X_{11} = (\theta_1 + d)X_{21} \quad (43)$$

この式を3行目に代入して、

$$\{(1 + \beta\rho_U)Uc + (\theta_1 + d)(1 + \beta\rho_U)Us\}X_{11} = -(\theta_1 - \rho)X_{31} \quad (42)$$

いま、

$$(c - c^*) = \frac{X_{31}}{X_{11}}(\beta - \beta^*)$$

において $\theta_1 < 0$ より、 $\theta_1 - \rho < 0$

また、 $\theta_1 + d > 0$ であることを以下に示す。

$$c(t) = (c_0 - c^*) X_{11} e^{\theta_1 t} + c^* \quad s(t) = (s_0 - s^*) X_{21} e^{\theta_1 t} + s^*$$

これを微分して、

$$\dot{s} = (s_0 - s^*) \theta_1 X_{21} e^{\theta_1 t}$$

$\dot{s} = c - ds$ より、 $c = \dot{s} + ds$ であるから、

$$c(t) = (\theta_1 + d)s(t)$$

であることがわかる。いま、嗜癖の仮定として $U_{cs} > 0$ としているので、 $\theta_1 + d > 0$ であることがわかる。

よって、 $\frac{X_{31}}{X_{33}} > 0$ である。 (44)

c が定常状態に向けて増えていくとき ($\dot{c} < 0$)、 β はマイナスの値であるため、定常状態に向けて下落していく ($\dot{\beta} < 0$)。これは、時間選好率が正であることによる生涯所得へのマイナスの影響は小さくなっていく。これは時間とともに将来を割り引かなくなっていくことと同じである。

定常状態で $\beta^* = -\frac{U}{\rho}$ であるから、定常状態における ρ の値を ρ^* とすると $\rho^* = -\frac{U}{\beta^*}$

$$\rho = \frac{\dot{\beta}}{\beta} - \frac{U}{\beta} = \frac{\dot{\beta}}{\beta} + \rho^*$$

$\dot{\beta} < 0$ のとき、 $\beta < 0$ より ρ は定常状態のときの値よりも大きいことがわ

かる。つまり、 c が定常状態に向かって増加していくとき、 ρ は定常状態に向かって低下していく。定常状態では、 ρ は $-\frac{U}{\beta}$ で一定となり、時間とともに変化しない。

これより、嗜癖財の消費が増えていくにつれて、時間選好率は低下していくことがわかる。このような時間選好率の期間構造は、定常状態から離れているときは大きく将来を割り引き、定常状態に近づくにつれて将来を割り引かなくなるため、一見するとhyperbolicな時間選好を持っているようにみえる。

IV. 結論

本稿はRecursiveであり、Becker and Murphy [1988] 流の合理的嗜癖を持つ特別なケースにおいて、動学的に一致しているにもかかわらず、人々の時間選好率の期間構造がhyperbolic preferenceにみえる例を示した。そこでは人々は合理的に行動する結果、hyperbolic preferenceを持つ場合と同じ消費計画を持ち、それを遂行していくのである。

このモデルでは嗜癖のある人が効用水準に依存して将来を割り引くため、次のようなことがおきる。人生における嗜癖財の消費パターンは、最初は早いスピードで消費を増やしていくが、ある時点（定常状態）以降は一定の量の消費を続け、消費量の増加はなくなる。嗜癖財の消費が急速に現在の効用を高め、嗜癖財の消費が蓄積していくために、初期には将来の割引率は大きい。しかし、定常状態になると、消費量が一定になり、過去からの消費による嗜癖財の蓄積量も一定になるため、その後は将来を大きく割り引く必要はなくなり、一定の割引率に落ち着く。このためこの人の時間選好率の期間構造は、あたかもhyperbolic preferenceをもっているように見えるが、動学的に不一致というわけではないという特殊なケースが得られる。なぜなら本人に選好の逆転はおきないためである。

このケースはたばこやアルコールなどに多くみられる軽度の addiction を説明するのに適している。すなわち $U_s > 0$ の beneficial addiction のときのみこのような時間選好率のふるまいが観察できる。重度の嗜癖では、 $U_s < 0$ となり harmful addiction と呼ばれるが、この場合には、モデルが鞍点解や収束解をもつ保証はなく、解は発散する。

本稿で考察した、時間選好率の期間構造は hyperbolic だが、動学的に一致しているようなケースは、時間とともに何らかの理由で割引率が下がっていくケースでおこる。Azfar のケースではベイジアン流に不確実性が減っていくことによってそれがおき、本稿で扱う Recursive な効用関数では、効用水準が高い消費水準とその蓄積によって時間とともに高まっていくことによって、割引率が初期に高くなっているため、定常状態の近傍では低下していく例であった。

同様な効果は所得の流列の時間的な変化によっても得られると考えられ、今後の課題としたい。Hyperbolic preference のような、人々の合理性を否定する現象も、一定の仮定のもとでは人々の合理性を示している場合もあるということが本稿の帰結である。

- 注
- 1) Barro (1997) においてそのような認識が見られる。
 - 2) この消費者は永遠に生きることを仮定しているが、これは計算を簡単にするためであり、何ら本質的な仮定ではない。Becker and Murphy [1988] では T 期まで生きる個人を考えている。このモデルを T 期まで生きる個人のモデルとしても重要な帰結に違いは生じない。
 - 3) 後述するように、W は定常状態で U/ρ で現される。これを U について微分すると、

$$d[U/\rho] dU = (\rho - U\rho_u)/\rho_2$$

したがって、この条件は瞬間的な効用関数 U の上昇によって全体的な効用 W が高まるための条件を示していることがわかる。

Appendix

3つの解の和である trace は、

$$\text{trace} = A_1 + \rho - d$$

ここで、3つの解を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とすると

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = A_1 + \rho + d$$

いま、

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (\beta_0 - \beta^*) \rho (X_{31} e^{\theta_1 t} + X_{32} e^{\theta_2 t} + X_{33} e^{\theta_3 t}) + \beta^* \\ &= (\beta_0 - \beta^*) \rho X_{31} e^{\theta_1 t} + (\beta_0 - \beta^*) \rho X_{32} e^{\theta_2 t} + \rho (\beta_0 - \beta^*) X_{33} e^{\theta_3 t} + \beta^* \end{aligned}$$

とあらわすことができる。これを微分すると、

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \rho \theta_1 (\beta_0 - \beta^*) X_{31} e^{\theta_1 t} \\ &\quad + \rho \theta_2 (\beta_0 - \beta^*) X_{32} e^{\theta_2 t} \\ &\quad + \rho \theta_3 (\beta_0 - \beta^*) X_{33} e^{\theta_3 t} \\ &= \rho \theta_1 \beta(t) + \rho (\theta_2 - \theta_1) X_{32} e^{\theta_2 t} + \rho (\theta_3 - \theta_1) X_{33} e^{\theta_3 t} - \theta_1 \rho \beta^* \\ \dot{\beta} &= \rho \beta \theta_1(t) - \theta_1 \rho \beta^* \end{aligned}$$

これと、 $\dot{\beta} = \rho \beta + U$ が定常状態の近傍以外でも同値であることから、

$-\theta_1 \rho \beta^* U$, $\beta^* = -U/\rho$ より、 $\theta = 1$ である。

定常状態の近傍で、 $\theta_1 = 1$ ではないとする。すると、

$$\rho (\theta_2 - \theta_1) X_{32} e^{\theta_2 t} = -\rho (\theta_3 - \theta_1) X_{33} e^{\theta_3 t}$$

これが成立するためには、例えば右辺が重根のペアであるとする、右もペアでなければならず、3つの重根ということになる。このとき、3重根を $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$ とすると、

$\dot{\beta} = \rho\beta\theta_1(t) - \theta_1\rho\beta^*$ がどの根についても同様に成立し、 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1$ となる。

これは、 $U_s > 0$ のとき、 $\det < 0$ であることと矛盾する。

よって、一つの解だけが1であることがわかる。したがって、 $U_s > 0$ のときには、実部が負の固有根はただ一つであるとわかる。

引用文献

- Ainslie, George., *Picoeconomics*: Cambridge University Press. 1992
- Auer, Ludwig von., *Dynamic Preferences, Choice Mechanizms, and Welfere*, Springer, 1998
- Beker, Robert A and John H. Boyd 3rd, *Capital Theory, Equilibrium Analysis and Recursive Utility.*, Brackwell, 1997
- Baker, Gray S. and Robert J. Barro, A Reformation of the Economic Theory of Fertility, *The Quarterly Journal of Economics*, 103, February 1-25, 1988
- Baker, Gary S., and Casey B. Mulligan, "The endogenous determination of time preference" *The Quarterly Journal of Economics*, August, 730-758, 1997
- Baker, Gary S., and Kevin M. Murphy., A Theory of Radical Addiction, *Journal of political economy*, 675-700, 1988
- Barro, Robert J., Myopia and inconsistency in the neoclassical growth model, *NBER working paper*, December, 1997
- Brown, Donald J. and Lucinda M. Lewis., Myopic economic agents, *Econometrica* 49, 359-368
- Epstein, Larry G. and J. Allan Haynes., The Rate of Time Preference and Dynamic Economic Analysis, *Journal of Political Economy*, Vol.91, August, 611-635, 1987
- Koopmans, Tjalling C., Stationary ordinal utility and Impatience, *Econometrica*, Vol.28, April, 287-309, 1960
- Fishier, Irving., *The Theory of Interest*, New York, Macmillan, 1930
- Gul, Faruk and Desendorfer Wolfgang., *Dynamic Inconsistency and Self- Control* *Prinston University Working Paper* 1999
- Koopmans, Tjalling C., Peter A. Diamond and Richard E. Williamson., Stationary Utility and Time Perspective, *Econometrica*, Vol.32, No.1-2 (January-April), 82-100, 1964
- Laibson, David., Golden eggs and hyperbolic discounting, *The Quarterly Journal of Economics*, May, 444-477, 1997
- Lowenstein, George and Drazen Prelec., Anomalies in intertemporal choice: Evidence

Rationing hyperbolic preferences without inconsistency: The special case of addiction

and an interpretation, *The Quarterly Journal of Economics*, May, 1992 574-597

O'Donoghue, T and Matthew Rabin., Doing Now or Later, *AER*, March, 103-124, 1999

Rudy, E.V and Cathy A.Simpson., Delayed Reward Discounting In Alcohol Abuse,
NBER working paper 6410, 1999

宇沢弘文 経済解析：基礎編、岩波書店,1990

瀬下博之「貨幣と成長－修正 Sidrasuki Model と景気変動への Impreca-tion－」三
田学会雑誌89巻4号、1997