『道路ネットワークと価格変化の影響』

藤　岡　明　房

1．ネットワークの経済

ネットワークとは、複数の対象が存在し、その対象の全部または一部の間に何らかの関係が存在している状況のことである。ネットワークには道路や鉄道のように目に見えるネットワークだけでなく、人間関係や資金の融資関係のように目に見えないネットワークも存在する。ネットワークの中の関係が安定していれば、その性質が調べられることになる。

ネットワークの性質としては、「ネットワーク外部性」と「ハブ・アンド・スポーク」が代表的なものである。前者については、情報の分野で利用されることが多い。後者についてはほとんどの輸送産業に適用可能であるにもかかわらず、ネットワーク・リストラクチャリングとの関連で主として航空産業の分野で利用されている。

これら２つのネットワーク現象は、ネットワークの構造を明示的に取り上げるか否かという性質の違いがある。ネットワーク外部性の場合、ネットワークの構造が明示的に示されなくても、ネットワークへの参加者の数が増えたとき既存の加入者が利益を得ることが示されれば（正の）ネットワーク外部性が存在することになる。それに対し、ハブ・アンド・スポークの場合、ハブとスポークの区別という意味でのネットワークの構造が問題になる。もっとも、ハブ・アンド・スポークの場合でも、「範囲の経済性」が観測されれば、ネットワークの経済が存在することになる。したがって、従来のネットワークの経済においてネットワークの構造が明示的に

取り上げられる必要は必ずしもなかった。

一方、道路交通の場合、例えば、新規の道路の建設によって交通量がどう変化するかを調べるというようなときには、道路のネットワークの構造が問題になってくる。したがって、道路交通の分野では、何らかの形で道路のネットワーク構造を前提にした分析が行なわれてきた。すでに、拙稿［1］においても、道路のネットワーク構造を取り入れた分析が行なわれている。そのとき利用されたのが、「グラフ理論」の一分野である「ネットワーク分析」であった。グラフ理論の場合、点と線との関係が問題になったのに対し、ネットワーク分析ではその線に何らかの重み（例えば、距離、交通費用、など）が与えられているという違いがある。

道路のネットワーク構造を前提にして分析を行なう場合、単純なグラフ理論よりネットワーク分析の方がより具体的な結果が得られることから、より望ましい方法といえるであろう。

拙稿での分析では、新規道路の建設の経済効果分析を行なった。しかし、価格が変化した場合についての分析は行なっていない。その理由は、価格を取り扱う場合、市場における需要と供給を明示的に取り扱う必要があったにもかかわらず、当時はその処理の方法が見出せなかったからである。だが、道路交通のネットワーク構造の拡大や混雑現象の増加、さらには地球温暖化などが生じ、ピークロードプライシングや炭素税などの導入も議論されるようになった。したがって、道路交通のネットワークにおいて価格の変化の効果を分析することの必要性が高まってきた。そこで、あらためて、価格や料金を明示的に取り入れた方法を検討したのが本論文である。

以下、第２節ではグラフ理論の基礎について必要最小限の説明を行なう。第３節では、交通の需要と供給の性質について述べ、特に交通の供給については個別経路の供給と全体の供給の関係についてはより詳しく説明する。第４節では、１ポート問題を取り上げ、道路のネットワーク構造が与えられた場合、価格や料金問題を処理するための計算方法について検討する。

第５節では、２ポート問題を取り上げる。最後に、まとめを行い終わりとする。

２．グラフ理論の基礎

2—1．木、補木、タイセット、カットセット

ネットワーク分析を行なう前に、グラフ理論の基礎を簡単に紹介しておく。グラフ理論に関する最初の論文は、18世紀スイスの数学者オイラー（Leonhard Euler 1707-1783）による「ケーニヒスベルクの橋の問題」であった。この問題は任意の点から出発し、全部の線分を一回だけ通ってもとの点に戻れるかどうかという一筆書きの問題であった。このように、いくつかの点（node, vertex）といくつかの線分（branch, edge, arc）によって描かれる図形が「線形グラフ」あるいは単に「グラフ」と呼ばれるものである。

グラフは、さらに「幾何グラフ」（geometric graph）、あるいは「抽象グラフ」として定義することができる。例えば、幾何グラフGとは、ｎ次元ユークリッド空間 R(n) の点の集合Vと曲線の集合Eからなり、以下の性質をもつものである。

[幾何グラフ]

１）Eに属するどの閉曲線もVに属する点を１個しか含まない。

２）Eに属するどの開曲線もVに属する点を２個だけ含みかつその開曲線の端点になる。

３）Eに属するどの曲線も自らとは交わらない。

４）Eに属するその２個の曲線もVに属する点以外に共有点をもたない。

幾何グラフGは、

$G=[V、E]$

と表され、各元 $v_i \in V$ をGの幾何的頂点、各元 $v_i \in E$ をGの幾何的辺という。

幾何グラフにおいて各幾何的辺 $v_i \in E$ が方向をもつ場合、幾何的有向辺といい、そのようなグラフを幾何的有向グラフという。各幾何的辺 $v_i \in E$ が方向をもたない場合、幾何的無向辺といい、そのようなグラフを幾何的無向グラフという。

次に、抽象グラフを定義する。その前に、非順序対を定義しておく。

[非順序対]

1つの集合Xの2つの元x、yが順序付けられていない対〈x、y〉として表すと、そのような対の全体の集合は、

$$X \triangle X = \{\langle x、y\rangle \mid x、y \in X\} \quad (1)$$

となる。このとき、

$$\langle x_1、y_1\rangle = \langle x_2、y_2\rangle \Leftrightarrow \{x_1、y_1\} = \{x_2、y_2\} \quad (2)$$

とする。この $X \triangle X$ の各元を非順序対という。

[抽象グラフ]

（無向）抽象グラフGは、空で無い集合Vと，Vと素な集合E（なお、$E=\phi$ の場合もある）、さらに写像 $\Phi : E \rightarrow V \triangle V$ によって定義される。

$$G=[V、E、\phi] \quad (3)$$

ここで、Vの各元をGの頂点、Eの各元をGの辺という。

抽象グラフについても、無向抽象グラフと有向抽象グラフがあり、辺 $e_k \in E$ について、$\Phi(e_k)=\langle v_i, v_j\rangle$ となるならば、無向抽象グラフの場合、辺 e_k は頂点 v_i，v_j に接続するという。また、有向抽象グラフの場合、有向辺 e_k は頂点 v_i を始点、頂点 v_j を終点とするという。

点および線分の数が有限の場合、「有限グラフ」という。有限グラフは常に3次元ユークリッド空間における幾何グラフになる。なお、2次元ユークリッド空間上で幾何的実現をもつグラフを「平面グラフ」といい、それ以外のものを非平面グラフという。

グラフGのn＋1個の点 v_0, v_1, … , v_n とn個の枝 k_1, k_2. …k_n を交互に並べた系列、

$$P = (v_0,\ k_1,\ v_1,\ k_2,\ \cdots\ ,\ k_n,\ v_n) \qquad (4)$$

において、すべてのiに対して、

$$k_i = (v_{1-1},\ v_i) \qquad (5)$$

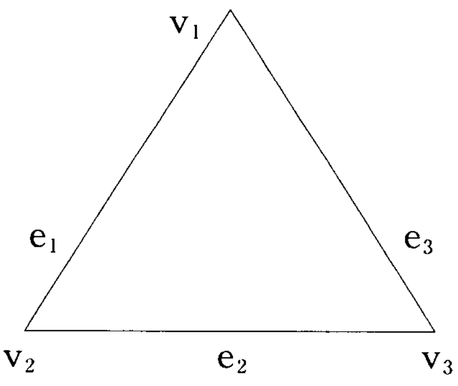
であるときこのPを点 v_0 から点 v_n への長さnの道（path）という。長さnの道の始点と終点が同一の点であるとき、この道を長さnの閉路（circuit）という。そして、同じ枝を2度以上通らないような閉路を単純な閉路という。単純な閉路は枝の集合によって表され、特にタイセット（tie－set）という。

与えられたグラフGの中の任意の2個の頂点の間に少なくとも1つの道が存在する場合、このグラフGは連結（connected）であるといい、このようなグラフを連結グラフという。

連結グラフGの木T(tree)とは、Gの頂点をすべて含み、しかも閉路を含まないようなGの連結部分グラフのことである。例えば、図1の場合、頂点は3つ、枝も3つあるが、すべての頂点を結ぶ枝があるため、このグラフは連結グラフである。また、このグラフの木は、枝 e_1 と枝 e_2 による木、枝 e_2 と枝 e_3 による木、枝 e_1 と枝 e_3 による木の3つが存在する。

連結グラフGの中の任意の木Tの補グラフ $\bar{T}$ を補木(cotree)という。補木の枝の中の任意の1つの枝を木に加えると、閉路が形成される。例えば、図1で枝 e_1 と枝 e_2 によって形成される木の補木は e_3 である。したがって、枝 e_1 と枝 e_2 による木に補木の枝 e_3 を加えると枝 e_1、e_2、e_3 による閉路

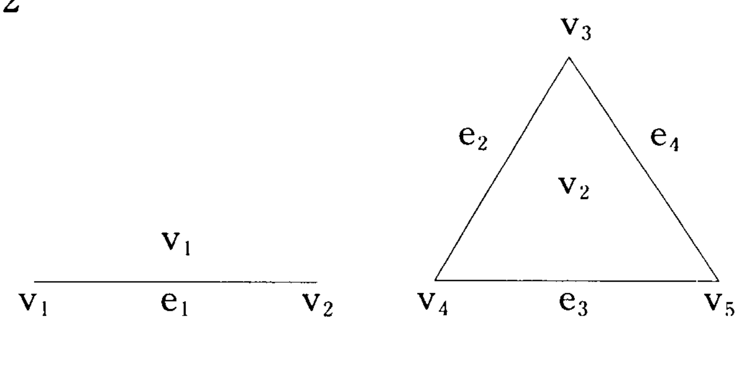
図1



が形成される。この閉路は単純な閉路である。したがって、この単純な閉路の枝から構成される集合はタイセットである。

与えられたグラフGの頂点集合 V(G) がｋ個の同値類に分割されるならば、Gを分離度ｋのグラフという。例えば、図2のグラフGは、$V_1 = \{v_1、v_2\}$と $V_2 = \{v_3、v_4、v_5\}$ とに直和分割される。V_1とV_2に属するそれぞれの中でのどの一対の頂点にも道が存在するが、V_1に属する任意の頂点とV_2に属する任意の頂点の間には道が存在しない。したがって、このグラフは非連結グラフである。しかも、２つの部分連結グラフに分かれるため、分離度２のグラフである。

図2



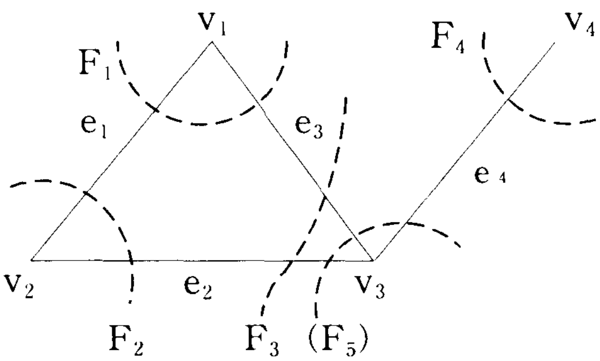
分離度ｋ、頂点の数ｎのグラフGの場合、その階数はｎ－ｋになる。それは、ψ(G) と表される。

グラフG＝(V, E) の点集合Vの２つの部分集合への分割 $(X, \bar{X})$ に対して、一方の端点がXに含まれ、他方の端点がXに含まれるような枝の集

合 F (X, $\bar{X}$) をカットセット F (cut－set) という。換言すると、カットセットFによって、その各枝が開放されたとき、階数を1だけ減少させるような（または、分離度を1だけ増加させるような）極小な枝集合のことである。

図3で、端点は v_1 から v_4 までの4つであり、枝は e_1 から e_4 までの4つである。これらの枝を F_1 から F_4 までのカットセットで開放されるとそれぞれv_1、v_2、v_4、そして v_3 と v_4、が分離されるので、階層が1だけ減少する。

図3



なお、 F_5 のように頂点V３を開放すると、同時に頂点 v_4 も開放してしまい、階層が1ではなく2だけ減少してしまう。したがって、F_5 はカットセットではない。

2―2. 有向グラフとしての接続行列、タイセット行列、カットセット行列

道路交通問題は、通常、ある点から別の点に移動することによって発生するので、有向グラフである。有向グラフGの接続行列、タイセット行列、カットセット行列を定義しておく。

n個の頂点 v_i とm個の辺 e_k からなる有向グラフG＝（V, E）の接続行列は、

$$a_{ik} = \begin{cases} +1 : 点 i が枝 k の始点の場合 \\ -1 : 点 i が枝 k の終点の場合 \\ \ \ 0 : それ以外の場合 \end{cases} \tag{6}$$

で与えられる行列である。なお、$i=1, \cdots, n$，$k=1, \cdots, n$, である。

有向グラフG＝(V, E) のタイセット行列 $B=[b_{ik}]$とは，各行 i が初等的な閉路（タイセット）L_iに、各列 k が枝 $k \in E$ に対応し、各要素 b_{ik}がそれぞれ、

$$b_{ik} = \begin{cases} +1 : 閉路 L_i で枝 k が正の向きの場合 \\ -1 : 閉路 L_i で枝 k が負の向きの場合 \\ \ \ 0 : それ以外の場合 \end{cases} \tag{7}$$

で与えられる行列 $(i \times k)$ をいう。なお、$i=1, \cdots, n$，$k=1, \cdots, n$, である。ただし、LはGのすべての初等的なタイセットの集合を表す。

有向グラフG＝(V, E) のカットセット行列$Q=[q_{ik}]$とは、各行iがGの初等的なカットセット q_i に、各列が枝 $k \in E$ に対応し、各要素 q_{ik}がそれぞれ、

$$q_{ik} = \begin{cases} +1 : q_k で枝 k が正の向きの場合 \\ -1 : q_k で枝 k が負の向きの場合 \\ \ \ 0 : それ以外の場合 \end{cases} \tag{8}$$

で与えられる行列 $(i \times k)$ をいう。なお、$i=1, \cdots, n$，$k=1, \cdots, n$, である。

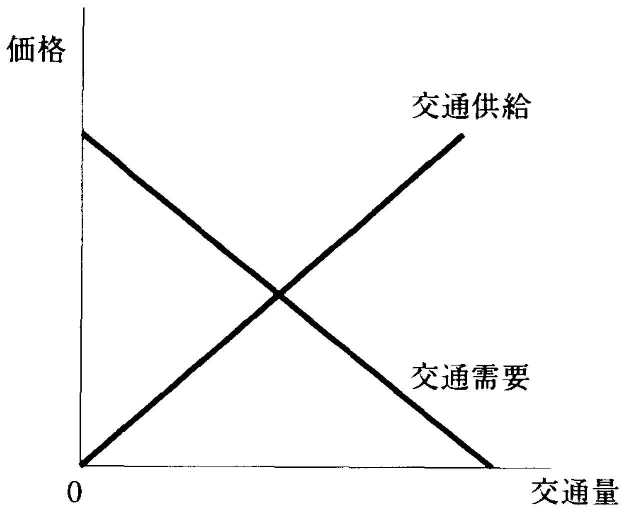
以上で、グラフ理論とネットワーク分析のための最小限の説明を行った。これらに基づいて道路ネットワーク構造が与えられたときの価格変化の影響を検討してみる。

3．交通需要と交通供給

3—1．交通需要関数と交通供給関数

道路交通の場合、交通はある地点から別の地点への交通移動として現れる。その交通は、はじめに交通需要が与えられたとき生じる。この需要が生じたとき、価格が高くなると交通需要が減少し、逆に価格が安くなると交通需要が増加するという右下がりの関係が成立する。反対に、交通の供給は、交通需要に応える形で生じる。この交通供給は、価格が高くなると交通供給が増加し、価格が安くなるという交通供給が減少するという右上がりの関係が成立している。これらの交通需要と交通供給が一致したところで交通量と価格が決定される。それを示したのが図4である。

図4



交通需要曲線と交通供給曲線は、価格の関数として表すことができる。それぞれを関数表示すると、交通需要は、次のような需要関数として表される。

$$x_d = x_d \ (p_d) \tag{9}$$

ここで、x_dは交通需要、p_dは交通需要価格である。

同様に、交通供給は、

$$x_s = x_s \ (p_d) \tag{10}$$

と表される。ここで、x_sは交通供給、p_sは供給価格である。

ここであらためて、交通価格と交通供給関数について注意点を述べておく。

まず、交通価格は、実際の交通にかかった費用（ガソリン代、タイヤなどの損傷費、高速道路料金、税金など）と時間費用の合計額である。通常、このようにして決定される価格は「フルプライス」(Full Price) と呼ばれる。

供給関数は、費用関数から決定される。しかしながら、混雑現象が存在する場合としない場合とでは費用関数の性質が異なる。混雑現象が存在しない場合は、交通量が増えても交通の速度は低下しないので、供給関数の形は水平となる。しかも、この費用関数は私的限界費用関数であり、同時に社会的限界費用関数でもある。

他方、混雑現象が存在する場合は、供給関数の形は右上がりとなる。したがって、供給関数は私的限界費用関数になる。そして、社会的限界費用関数とは混雑の分だけ乖離することになる。

このように混雑の程度によって供給関数の形が異なってくる。しかし、供給関数の形は、道路のネットワーク構造の違いによっても異なってくる。したがって、道路のネットワーク構造を区別して全体の交通供給関数を特定化することが必要である。

3—2. 簡単なネットワーク構造を取り入れた交通供給関数

交通供給関数の形を決定するため、単純なネットワーク構造の下での供給関数を見てみる。そこで、単純なネットワーク構造の代表的な例をいくつか取り上げていく。

図５－１のように経路が１つの場合がもっとも単純なケースである。このケースで、点 v_1 から点 v_2 への交通需要に応じて交通供給が生じるが、その１つの経路 e_1 の供給曲線の形が、そのまま全体の供給曲線の形となる。それが、図５—２である。

図5－1

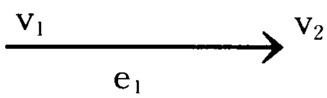
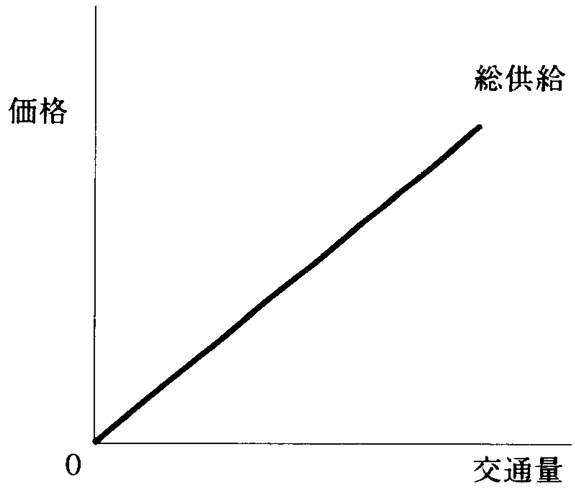


図5－2



次に、経路が２つある場合を取り上げる。それを示したのが図６－１である。各経路での供給曲線が右上がり（混雑現象が存在する場合）のとき、全体の供給曲線は２つの供給曲線を水平に合計することによって得られる。すなわち、図６―２と図６―３を水平に合計すると図６―４になる。

図6－1

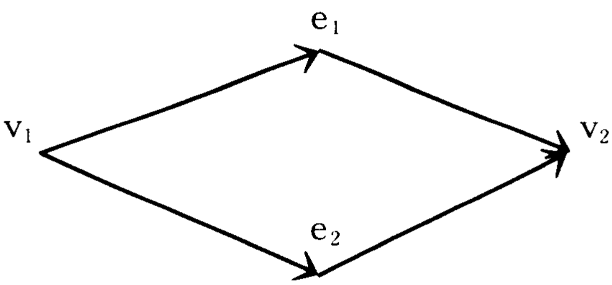


図6－2

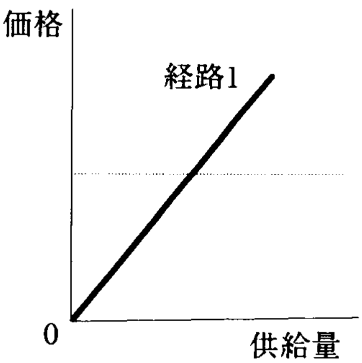


図6－3

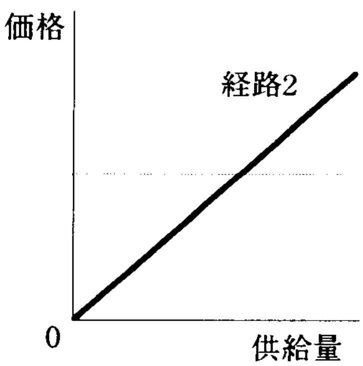
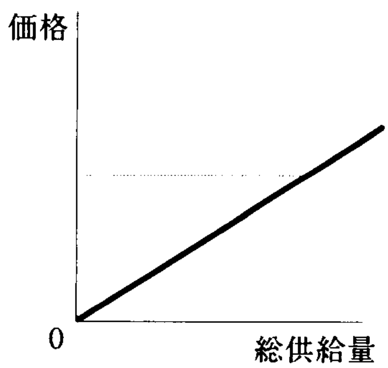


図6－4



もし、２つの経路のうち１つの経路の容量が小さく混雑現象が発生するのに対し、もう１つの経路では容量が大きく混雑現象が発生しないならば、全体の供給曲線は当初右上がりだが、途中から水平になる。これは、図７—１と図７—２を水平に合計した図７—３によって示される。

経路が２つでも、それらが図８—１のように直列につながっていれば、２つの経路の供給曲線を垂直に合計することによって図８—４のような全体の供給曲線が得られる。ただし、需要は点 v_1 から v_3 までの交通に対して生じるものとする。

図7−1

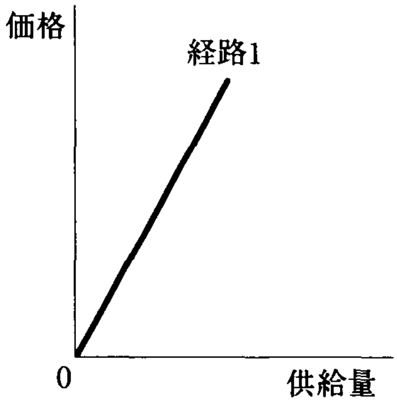


図7−2

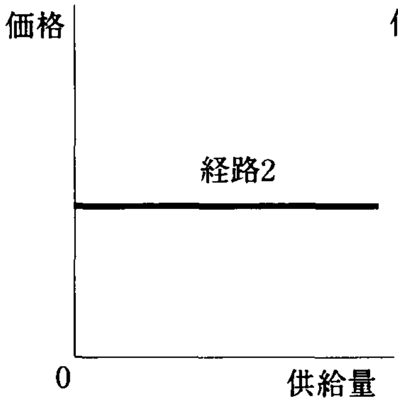


図7−3

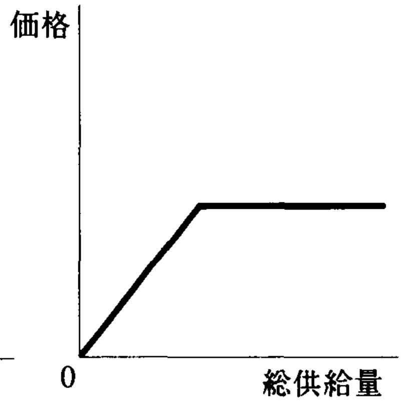


図8−1

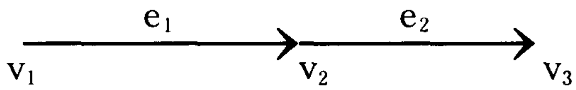


図8−2

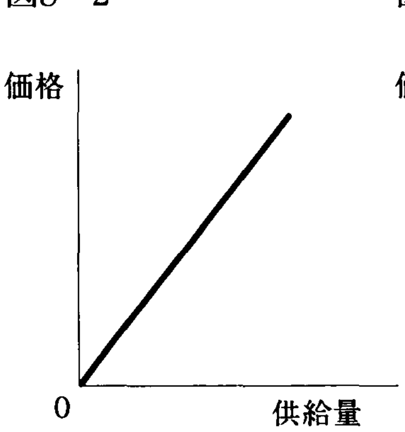


図8−3

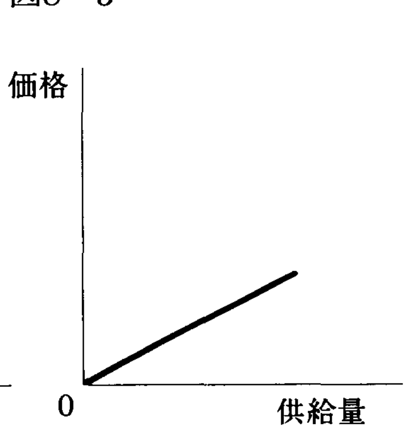
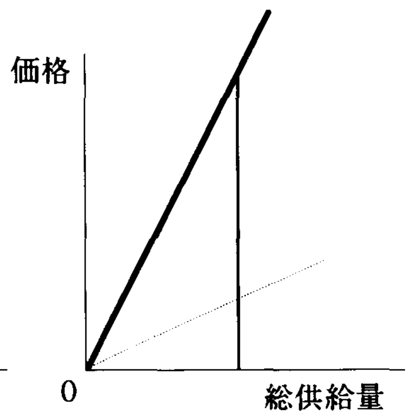
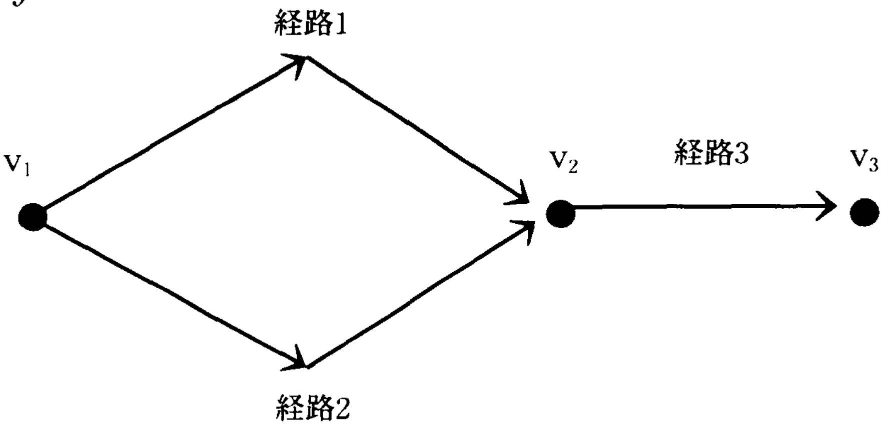


図8−4



では、図９のように経路が３つの場合はどうなるであろうか？単純に３つの経路での供給関数を合計するわけにはいかない。直感的には、点v_1と点v_2の間については経路１と経路２の供給関数を水平に合計し、v_2とv_3の間では経路１（あるいは経路２）と経路３の供給関数を垂直に合計すればよいことになる。そのことを確認するため、あらためて「ネットワーク分析」を用いて道路ネットワークの総供給関数を求めてみる。

図９



４．ネットワーク分析　―１ポート問題―

４―１．ネットワークの１つの経路としての交通需要

ネットワーク分析を行なうにあたって、交通需要の意味を考えておくことにする。通常、交通需要は外部から与えられたものとして扱われる。しかし、ネットワーク分析を行なう場合、交通需要を明示的にネットワークの中に取り入れる必要がある。しかも、交通需要はある点から別の点までの交通需要だけでなく、任意の点から別の任意の点までの複数の需要が存在する可能性もある。そこで、ある点から別の点までの需要を１つの経路としてネットワークの中に取り入れ、任意の点から別の任意の点までの需要も別の経路として取り扱うことにする。なお、１つの需要しか存在しない場合は、１ポート問題と呼ばれる。

図10　１ポート問題（v_1からv_3）

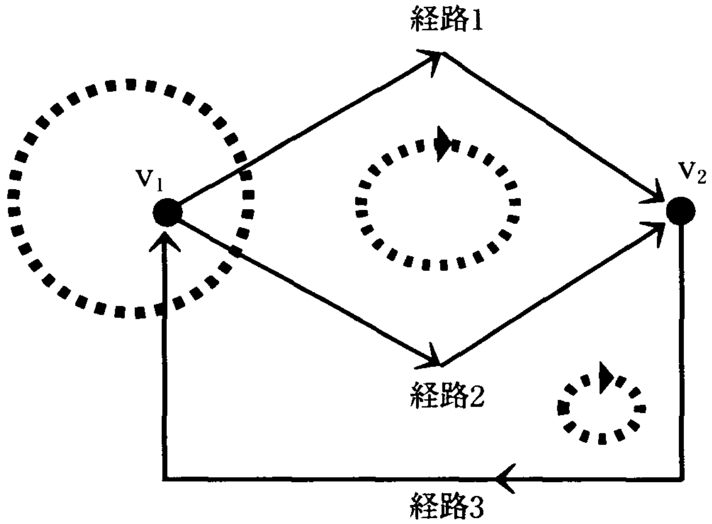
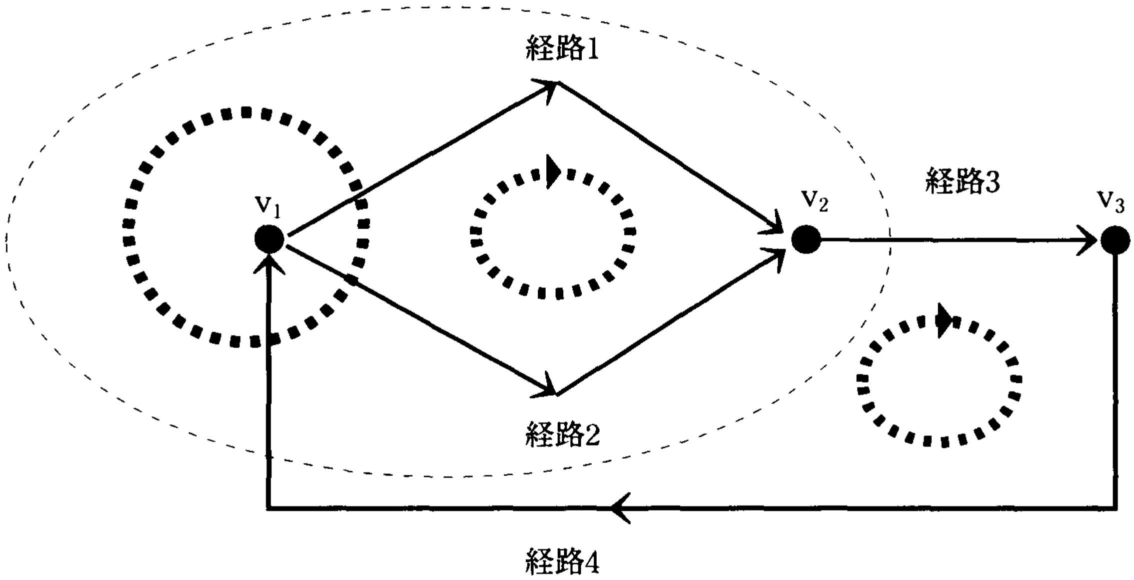


図11　　１ポート問題（v_1からv_3）



交通需要をネットワークの中の１つの経路として明示化した場合、その需要によって何が生じるかというと、お金の流れが生じる。しかも、そのお金の流れは、交通の流れと反対の流れになる。そこで、需要を明示的に取り入れたネットワーク分析を行なってみる。まず、ネットワーク構造は、既存の経路だけでなく、新しい経路も加えられる。それを示したのが、図10および図11である。

図10において、経路1と2は交通の流れであり、経路3はお金の流れである。

図11において、経路1から3は交通の流れであり、経路4はお金の流れである。両図において、経路1から経路3までの個別の経路には、道路の混雑の程度の違いが存在する。

4—2. 接続行列、カットセット行列、タイセット行列

4-2-1. 図10のケース

図10の接続行列は、次のようになる。

$$\begin{array}{lc} \text{点} \diagdown \text{枝} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

この接続行列で、点 v_1 を基準とすると枝1と2はこの点 v_1 から出ているので＋1であり、枝3はこの点 v_1 に入っているので－1である。v_3 を基準とすると枝1と枝2はこの v_3 に入るので－1であり、枝3は出るので＋1である。

次に、カットセット行列とタイセット行列を求めてみる。そのために、あらかじめ木を選んでおく。

枝｛1，2，3｝の中からどれか1つの木を選ぶ場合，閉路を含まないようにする必要がある。枝3は需要を表す枝なので，この枝を含まない木を選ぶことにする。そこで、たとえば木を｛1｝とする。このとき補木は｛2，3｝になる。もちろん、木を｛2｝としてもよい。しかし、枝1と枝2を同時に木とすると閉路を含むので木にならない。

この木｛1｝についてのカットセット行列とタイセット行列とを求めるにあたって図10のような補助的点線の領域や補助的矢印を追加する。この

補助的点線の領域は点の集合を分割するカットセットに基づいている。

この点線の領域を利用するとこの木 {1} に対する（基本）カットセット行列注2)は、

$$Q_f = \begin{array}{cc} 1 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

となる。ここで、木 {1} の中の枝1を基準にすると、この枝1を切断し v_1 を内側に含む点線で囲まれた領域から枝1と枝2は出ているので+1である。それに対し枝3は入っているので−1である。

次に、木 {1} についての（基本）タイセット行列注3)を求めてみる。そこで、この木の補木から決定しておく。補木は {2，3} である。したがって、木 {1} についての（基本）タイセット行列は、

$$B_f = \begin{array}{cc} 2 & \\ 3 & \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。ここで、枝 {1} に枝2を追加すると、枝1との間では閉路を形成するが、図10のような矢印の方向で見ていくと、枝1の方向と枝2の矢印の方向は逆なので−1である。また、枝3は関係ないので0である。同様に、枝1に枝3を追加すると、枝1との間では閉路を形成する。矢印の方向から、枝1と枝3は矢印と同じ方向なので+1である。枝2は関係ないので0である。

4−2−2. 図11のケース

図11のケースについても、接続行列、カットセット行列、タイセット行列を求めてみる。

接続行列は、次頁上のようになる。

この接続行列で、点 v_1 を基準とすると枝1と枝2はこの点 v_1 から出ているので+1であり、枝4はこの点 v_1 に入っているので−1である。枝

$$A = \begin{array}{c|c} \text{点}\backslash\text{枝} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{11}$$

3はv_1に接続していないので0である。v_2を基準にすると枝1と枝2はこのv_1に入るので－1であり、枝3は出ているので＋1である。枝4は接続していないので0である。v_3を基準とすると枝1と2は接続していないので0である。枝3は入っているので－1である。枝4は出ているので＋1である。

次に、カットセット行列とタイセット行列を求めてみる。それを行うためにあらかじめ特定の木を選んでおくことにする。

枝{1，2，3，4}の中からどれか1つの木を選ぶ場合，閉路を含まないようにする必要がある。枝4は需要を表す枝なので，この枝を含まない木を選ぶことにする。そこで、たとえば木を{2、3}とする。このとき補木は{1、4}になる。もちろん、木を{1，3}としてもよい。しかし、枝1と枝2を木とすると閉路を含むので木にならない。

この木{2，3}についてのカットセット行列とタイセット行列とを求めるにあたって図11のような補助的点線の領域や補助的矢印を追加する。この補助的点線の領域は点の集合を分割するカットセットに基づいている。

この点線の領域を利用するとこの木{2，3}に対する（基本）カットセット行列は、

$$Q_f = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{12}$$

となる。

ここで、木 {2, 3} の中の枝2を基準にすると、この枝2を切断し v_1 を内側に含む点線で囲まれた領域から枝2と枝1は出ているので+1である。それに対し枝4は入っているので−1である。枝3は関係ないので0である。

木 {2, 3} の中の枝3を基準にすると、この枝3を切断し v_1 を内側に含む点線で囲まれた領域から枝3は出ているので+1であり、枝4は入っているので−1である。枝1と枝2とは点線で囲まれた領域の内側に含まれるので0である。

次に、木 {2, 3} についての（基本）タイセット行列注3）を求めてみる。そこで、この木の補木から決定しておく。補木は {1, 4} である。したがって、木 {2, 3} についての（基本）タイセット行列は、

$$
B_f = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{13}
$$

となる。

ここで、枝 {2, 3} に枝1を追加すると、枝2との間では閉路を形成するが、図11のような矢印の方向で見ていくと、枝2の方向と矢印の方向は逆なので−1である。枝3は閉路を形成しないので0である。枝1は矢印と同じ方向なので+1である。枝4は閉路を形成しないので0である。枝 {2, 3} に枝4を追加すると、枝4は枝2, 3と閉路を形成する。矢印の方向を図3のように与えると枝2と枝3そして枝4の方向と矢印の方向は同じなのでそれぞれ+1である。枝1はこの閉路に含まれないので0である。

以上によって図10と図11のような道路ネットワークの下におけるカットセット行列とタイセット行列が求められた。これらの行列を用いて交通量の法則と価格（フルプライス）の法則を具体的に示すことにする。

4—3. 交通量の法則、価格の法則

道路ネットワーク構造の下における交通量の法則と価格の法則は次のようになる。

交通量の法則＝任意の点に流入・流出する交通量の代数和はあらゆる時点においてゼロである。

価 格 の 法 則＝任意の１つの閉路についてその方向を考えた場合、閉路に沿って一巡するとき各枝の価格の代数和は任意の時点でゼロである。

これらの法則を別の観点から説明すると次のようになる。交通量の法則はある点に入った交通量はすべてその点から出て行くので、入った交通量の合計＝出た交通量の合計　という関係が生じる。しかも、入った交通量の符号はマイナスであり、出た交通量の符号はプラスであるから、(－)入った交通量の合計＋出た交通量の合計＝（－）入った交通量の合計＋入った交通量の合計＝０　となる。また、枝１と３、あるいは枝２と３を通ることによって交通費が発生するが、需要によってその費用が負担される。すなわち、価格については費用額＝需要価格という関係が成り立つ。

交通量の法則をカットセット行列を用いて表すと、

$$Q_f \cdot X = 0 \tag{14}$$

となる。ここで、Q_f は（基本）カットセット行列、Xは交通量ベクトルである。すなわち、

$$X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1})' \tag{15}$$

である。x_iは経路 i（i＝1, …, n）での交通量であり、x_{n+1}は交通需要量

である。’は転置を表す。

同様に、価格の法則をタイセット行列を用いて表すと、

$$B_f \cdot P = 0 \tag{16}$$

となる。ここで、B_fは（基本）タイセット行列、Pは価格ベクトルである。すなわち、

$$P = (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ p_{n+1})' \tag{17}$$

である。p_iは経路 i での価格である。p_{n+1}は総交通の需要価格である。’は転置を表す。

4—4. 均衡条件

4-4-1. 図10のケース

カットセット行列を用いた交通量の法則から、交通量に関する関係が導出できる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

これらから、次のような方程式が得られる。

$$x_1 + x_2 = x_3$$

価格に関しては、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = 0$$

となる。これらから、

$$p_1 = p_2$$

$$p_1 = -p_3$$

という方程式が得られる。

各経路については、

$$p_3 = -p_d \tag{24}$$

$$x_1 = g_1(p_1) \tag{25}$$

$$x_2 = g_2(p_2) \tag{26}$$

という関係が成り立っている。したがって、これらから、

$$x_s = g(p_s)$$

という総供給曲線が得られる。

もし、個別経路での費用関数が、図12－1、12－2のようであれば、総供給曲線の形は図12－3のようになる。この総供給曲線と別途与えられる需要曲線から均衡値が決定される。それを示したのが、図13である。

図12－1

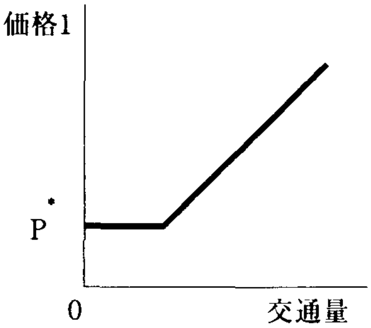


図12－2

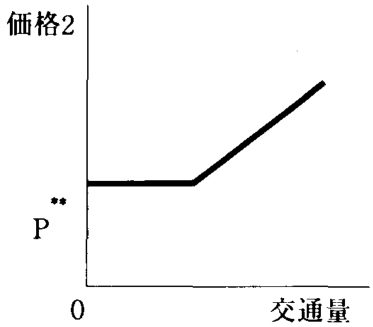


図12－3

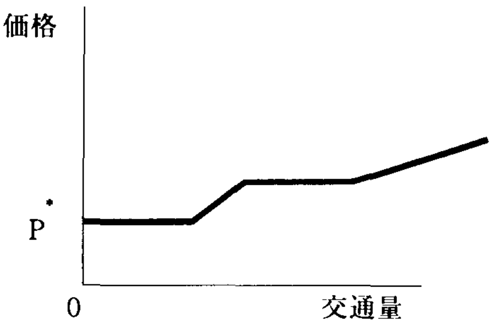


図13

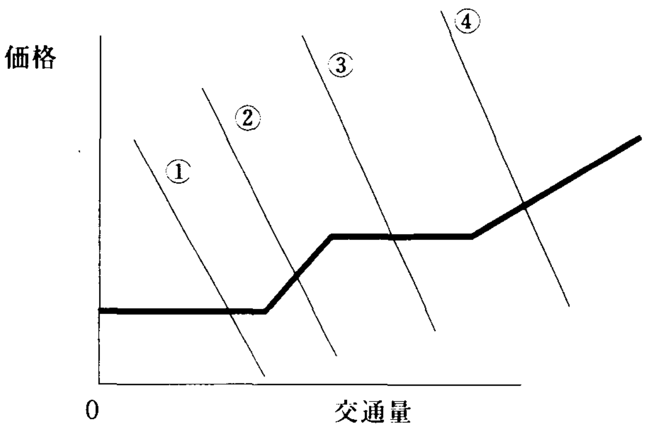


図13で需要曲線がどこに来るかによって均衡値の性質が異なってくる。需要曲線を①から④までの4種類想定する。それぞれの場合の均衡値の性質を調べてみる。

① 経路1の水平部分から構成される総供給曲線の場合。
このとき、経路1の固定料金部分が変化したときにのみ交通量が変化する。経路2の料金が変化しても交通量は変化しない。

② 経路1の右上がりの部分から構成される総供給曲線の場合。
経路2の料金が変化しても交通量は変化しない。経路1の固定料金が変化しても交通量は変化しない。

③ 経路2の水平部分から構成される総供給曲線の場合。
経路1の料金が変化しても交通量は変化しない。経路2の固定料金の料金が変化したときにのみ交通量が変化する。

④ 経路1と経路2の右上がりの部分の傾きを水平に合計した供給曲線から構成される。経路1と経路2の固定料金が変化しても交通量は変化しない。変動料金が変化すると交通量も変化する。

このように、総供給曲線の形が決定されると総需要曲線との関係で均衡値が決定され、しかもその均衡値の性質も決まってくる。

4-4-2. 図11のケース

カットセット行列を用いた交通量の法則から、交通量に関する関係が導出できる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

この交通量の関係から次の方程式が得られる。

$$x_2 + x_1 = x_4 \tag{19}$$

$$x_3 = x_4 \tag{20}$$

また、タイセット行列を用いた価格の法則から、価格に関する関係が導出できる。

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_1 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

この価格の関係から次の方程式が得られる。

$$p_1 = p_2 \tag{22}$$

$$p_2 + p_3 = -p_4 \tag{19}$$

各経路でのフルプライスと交通量の関係から、

$$p_4 = -p_d \tag{24}$$

$$x_1 = g_1(p_1) \tag{25}$$

$$x_2 = g_2(p_2) \tag{26}$$

$$x_3 = g_3(p_2) \tag{27}$$

と置ける。

これらから、

$$x_s = g(p_s) \tag{28}$$

という総供給関数が導出できる。

この総供給関数と総需要関数、$x_d = f(p_d)$ とから均衡価格（$p = p_d = p_s$）と均衡数量（$x = x_d = x_s$）が決定できる。

4—5.　混雑していない道路のケース

総供給関数（28）を具体的に導出するため、各経路でのフルプライスと

交通量の関係を与えることにする。

はじめに、道路が混雑していないという簡単なケースから見ていく。

道路が混雑していないならば、各経路での交通量が増加しても私的限界費用（＝社会的平均費用）は一定になる。そこで、各経路でのフルプライスはそれらの限界費用に等しくなる。各経路での限界費用をＣｉ（ｉ＝１，２，３）とすると、各経路でのフルプライスは、

$$p_i = C_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{29}$$

となる。

ここで、各経路での限界費用の間の関係は次のようになっているものとする。

$$C_1 \geqq C_2 \geqq C_3 \tag{30}$$

このとき、$C_1 > C_2$ ならば、経路１は経路２より費用が高いため利用はゼロになる。$C_1 = C_2$ ならば、経路１と経路２の利用は無差別になる。

これらから、

$$p_s = C_2 + C_3 \tag{31}$$

となる。そして、$C_1 = C_2$ のとき、

$$p_s = C_1 + C_3 \tag{32}$$

も成立する。

もし、需要関数の形が次のように与えられるとき、

$$x_d = \alpha - \beta \cdot p \quad (\alpha\text{は切片の高さ、}\beta\text{は需要関数の傾き}) \tag{33}$$

このｐに総供給関数（31）の値を入れると、均衡交通量ｘが決定できる。

$$x = \alpha - \beta \cdot (C_2 + C_3) \tag{34}$$

この均衡交通量は、フルプライスの値と需要関数のシフトによって変化する。

もしフルプライスの構成要因である道路料金（例えば、経路２の料金）が上昇すると、経路１との間で代替が生じ、経路２は交通需要がゼロになる。したがって、C_1が変化しない限りC_2が上昇しても、

$$p_s' = C_2' + C_3 > p_s = C_1 + C_3 \tag{35}$$

であるため、交通費用は変化せず、経路1の交通量が増加する。

また、均衡交通量は、道路料金が変化しないので、前と同じである。

$$x = \alpha - \beta \cdot (C_1 + C_3) \tag{36}$$

4—6. 混雑している道路のケース

次に、道路が混雑しているケースを取り上げる。混雑しているケースでは、私的限界費用（＝社会的平均費用）は増加する。

例えば、経路1の道路で混雑が発生し、私的限界費用が増加する場合を想定する。このとき経路1ではフルプライスと供給の間には次のような関係が成り立つものと仮定する。

$$p_1 = c_1 x_1, \tag{37}$$

ここで、c_1 はフルプライスの係数である。

経路2と経路3では依然として混雑が発生していないものとする。

$$p_2 = C_2,\ p_3 = C_3 \tag{38}$$

このとき、

$$p_1 \gtreqless p_2 \tag{39}$$

に応じて p_2 が選ばれたり、p_1 が選ばれたり、あるいは同時に選ばれる。同時に選ばれるのは、

$$p_1 = p_2 \tag{40}$$

のときである。すなわち、

$$c_1 x_1 = C_2 \tag{41}$$

となるときである。したがって、x_1 の値は、

$$x_1 = C_2 / c_1 \tag{42}$$

となる。また、p_s は、

$$\begin{aligned} p_s &= p_2 + p_3 \\ &= C_2 + C_3 \end{aligned} \tag{43}$$

なので、均衡価格のとき、

$$p = p_s = p_d \tag{44}$$

より、

$$x_d = \alpha - \beta\ (C_2 + C_3) \tag{45}$$

となる。(20) 式より、

$$x_3 = x_d = \alpha - \beta\ (C_2 + C_3) \tag{46}$$

となる。さらに、(19) 式より、

$$\begin{aligned} x_2 &= x_d - x_1 \\ &= \alpha - \beta\ (C_2 + C_3) - C_2 / c_1 \end{aligned} \tag{48}$$

となる。

このようにして得られた均衡価格と均衡数量を用いて、ある経路でのフルプライスが変化した場合の均衡価格と均衡数量の変化の方向を調てみる。

例えば、経路 1 でのフルプライスが c_1 の拡大によって増加した場合について取り上げてみる。

このとき、(42) 式により x_1 は縮小する。経路 2， 3 のフルプライスは変化しないので、総交通量も変化しない。

$$x = x_d = \alpha - \beta\ (C_2 + C_3)$$

したがって、経路 3 の交通量 x_3 も変化しない。しかし、経路 1 の交通量 x_1が減少しているので、経路 2 の交通量 x_2 は増加する。

次に、経路 2 でのフルプライスC_2が増加した場合についても見てみる ($C_2 \rightarrow C_2'$)。このとき、供給価格 p_2 が上昇するので、経路 1 の利用が増える。

$$x_1 = C_2' / c_1 \tag{49}$$

経路 2 のフルプライスが上昇したので需要関数から、

$$x_d' = \alpha - \beta\ (C_2' + C_3) \tag{50}$$

となり、交通量 x は減少する。したがって、経路 3 の交通量 x_3 も減少する。同様に、交通量 x_2 も、

$$x_2' = x_d' - x_1'$$
$$= \alpha - \beta\ (C_2' + C_3) - C_2' / c_1$$
$$< x_2 \quad (51)$$

減少する。

以上のように、解析的に簡単な場合は容易に価格の変化の効果を調べることができる。しかし、より複雑になった場合は比較静学分析などの手法を用いる必要がある。

5．道路ネットワーク分析　―2ポート問題―

5―1．2種類の交通需要

4節では交通需要は、v_1からv_3までの間で生じるものと想定した。しかし、交通需要としては、v_1からv_2までの間で生じる場合もある。そこで、v_1からv_3までの交通需要と、v_1からv_2までの交通需要の2種類の交通需要がある場合について調てみることにする。これは「2ポート」問題に対応する。

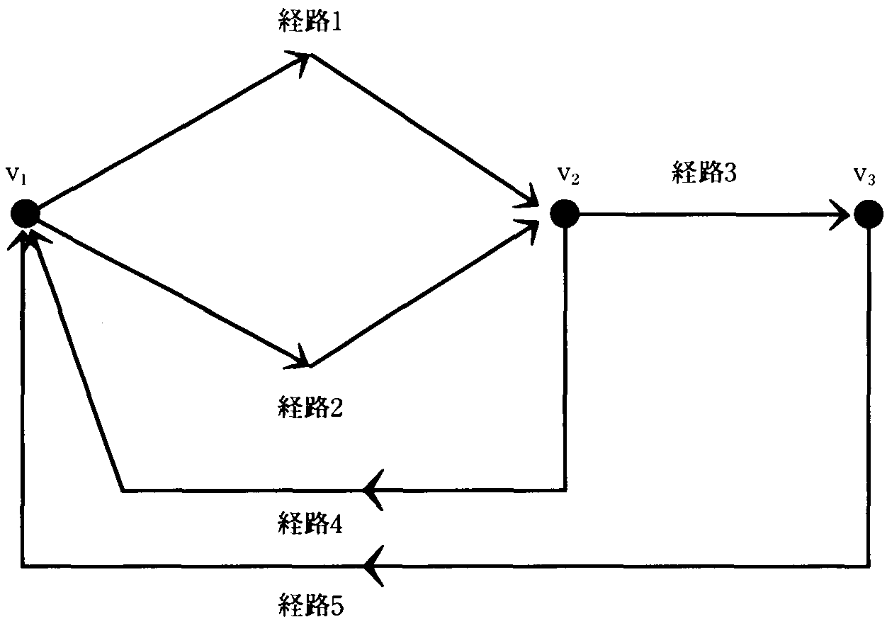
2種類の交通需要をネットワーク分析で行うためには、図12のネットワークにさらに経路4と経路5を追加しなければならない。それを示したのが図13である。

この図14で、枝{1，2，3，4，5}の中から1つの木を選び、それを{2、3}とする。すると、補木は{1、4、5}となる。

基本カットセット行列は、

$$Q_f = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (52)$$

図14　　2ポート問題



となり、基本タイセット行列は、

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{array} \\
B_f = \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{53}
$$

となる。

これらを用いると、カットセット行列から、

$$x_1 + x_2 = x_4 + x_5 \tag{54}$$

$$x_3 = x_5 \tag{55}$$

となる。また、タイセット行列から、

$$p_1 = p_2 \tag{56}$$

$$p_2 = -p_4 \equiv p_{4d} \tag{57}$$

$$p_2 + p_3 = -p_5 \equiv p_{5d}$$

となる。

これらと、経路4の需要関数、および経路5の需要関数

$$x_{4d} = -\alpha p_{4d} + \beta \tag{58}$$

$$x_{5d} = -\gamma p_{5d} + \delta \tag{59}$$

を用いてx, pを求めることができる。

x_1からx_3までのフルプライスに3節と同じ仮定を設けると、

$$p_1 = C_1 \tag{60}$$

$$p_2 = C_2 \tag{61}$$

$$p_3 = C_3 \tag{62}$$

となる。

したがって、

$$C_1 = C_2 \tag{63}$$

のときにのみ経路1と経路2が同時に利用される。

(58)式と(59)式とから、

$$x_{4d} = -\alpha C_1 + \beta \tag{64}$$

$$x_{5d} = -\gamma (C_1 + C_3) + \delta \tag{65}$$

となる。(55)式から、

$$x_3 = x_{5d} \tag{66}$$

となる。また、(54)式から、

$$x_1 + x_2 = -\alpha C_1 + \beta - \gamma (C_1 + C_3) + \delta \tag{67}$$

となる。この(67)式でC_1とC_2の大小関係によってx_1だけが利用されたり、x_2だけ利用されることもあるが、無差別の場合($C_1 = C_2$)もある。

これらの結果に対し、あらためて価格変化の分析を行うことができる。例えば、経路1のフルプライスが上昇した場合を見てみる($C_1 \to C_1'$)。

経路1の交通量は、当初ゼロでなければ($C_1 = C_2$のとき)、フルプライスの上昇によりゼロになる。そして、経路2の交通量は当初ゼロでなければ増加する。

経路4の交通需要は、経路1から経路2に代替されるのでC_2も同時に変

化しない限り、一定であり変化しない。同様に、経路5の交通需要も変化しないので一定である。

以上のように、簡単なケースについては価格変化の効果の分析もできるが、より複雑なネットワークの場合にはやはり比較静学分析が必要である。

6．まとめ

本論文では、道路のネットワーク構造が与えられた場合の価格変化の分析を行うことを目的とした。その目的のために、「グラフ理論」さらに「ネットワーク分析」を適用した。

その際、交通需要をネットワーク分析に取り入れるためには物的な交通需要の反対の流れとしてのお金の流れを想定し、その流れを1つの経路とすることが重要である。この新しい経路を想定することによって、需要関数などを外生的に与えることができるようになった。

しかし、本論文では紙幅の制限があることから、きわめて単純なネットワークを利用した。そのため、グラフ理論の有効性があまり明らかにされなかったかもしれない。その意味で、今回の分析はあくまで第一段階のものであり、より複雑なネットワークへ拡張したり、より具体的なケースを取り上げるなどして充実を図る必要がある。それらは今後の研究の課題とする。

参考文献

[1]「交通ネットワークフロー分析手法の現況と課題」、宮城、溝上著、『高速道路と自動車』、1988年2月.

[2]「道路建設便益の測定に対するグラフ理論の適用」、藤岡明房、『高速道路と自動車』、1990年11月.

[3]『回路理論入門（1）』、篠田庄司著、コロナ社、1996年2月。

[4]「システムリスクとネットワーク形態」、舘健太郎著、『三田学会雑誌』、93巻3号、2000年10月.

[5] "The Economics of Hubs : The Case of Monopoly," Hendricks,K., M. Piccione, and G. Tan, *Review of Economic Studies*, 62, p83-99, 1995.

[6]" A Strategic Model of Social and Economic Networks," Jackson,M., and Wolinsky, *Journal of Economic Theory*, 71, p44-74, 1996.

注　1) 詳細については、参考文献[1]を参照。

2) グラフGの1つの木に関する初等的カットセットに対応するカットセット行列を木の基本カットセット行列（fundamental cut-set）という。

3) 木の枝によって形成されるGの部分グラフと補木の中の1つの枝によって初等的な閉路が得られる。この閉路を木に関する基本閉路といい、この基本閉路を表すタイセットを基本タイセット（fundamental tie-set）という。