

グラフ理論の道路投資分析への適用

藤岡 明房

1. はじめに

道路は社会資本の1つであり利用者に便益をもたらすものである。その道路の便益を測定するためにいろいろな方法が考案されてきた。しかしながら、道路の重要な性質であるネットワーク構造については明示的に分析されることは少なかった。また、たとえネットワーク構造を明示的に示したとしても極めて単純なものでしかなかった。¹⁾そのため、道路の便益を測定するとしてもネットワーク構造については無視するか、強い仮定を設けてネットワーク構造による効果を特定化するだけであった。これでは道路の便益の測定は不十分なものになってしまう。そこで、道路のネットワーク構造を明示的に示し、その上でネットワーク構造による効果を考慮に入れて道路の便益を測定するような方法をあらたに考え出すことが求められることになる。

本論文では、道路のネットワーク構造を取り扱うために離散数学の1つである「グラフ理論」を採用することにする。しかも、ネットワーク構造が与えられた時の道路での交通量を問題にすることから、特に「電気回路理論」に適用されるグラフ理論の手法を重視することにする。しかし、直接グラフ理論をネットワークの構造が与えられた場合の道路投資便益の測定に適用すると、グラフ理論の有効性がそれほど際立たない。そこで、はじめに従来の方法を示し、それからグラフ理論を適用していくことにする。以下、2章では道路のネットワーク構造と需要関数、供給関数についての

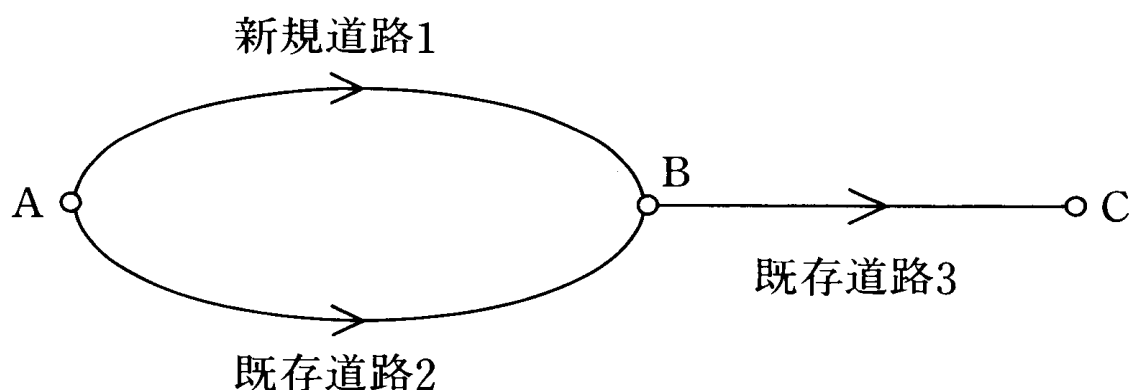
前提を示し，3章では従来の方法に基づいて道路投資便益の測定を行う。そして，4章ではグラフ理論の基本概念を示し，それに基づいて道路ネットワーク構造が与えられたときの道路投資便益の測定を行う。さらに，仮設例に基づいて具体的に便益の測定方法を示すことにする。

2. 道路のネットワーク構造

2.1 前提条件

道路のネットワーク構造を問題にする場合その構造の複雑さの違いによって分析方法も異なってくる。すなわち，ネットワーク構造が相対的に簡単な場合にはネットワーク構造の形状を明示的に示して分析するのに対し，ネットワーク構造が相対的に複雑な場合にはネットワーク構造の形状をブラックボックスとし，インプット，アウトプットの変化のみによって分析するのである。²⁾ 本論文では議論の単純化のためネットワーク構造が相対的に簡単な場合を取り上げ，しかもその構造をあらかじめ与えておくことにする。それが図1である。

図1 道路のネットワーク構造



道路ネットワークの構造は、図1で示されているように、A, B, Cの3つの点（ノード）と、1, 2, 3の3本の枝（ブランチ）から成り立っている。そして、点Aは始点、点Bは中継点、点Cは終点であり、枝1は新規道路、枝2, 3は既存道路2, 3を表わしている。このような道路ネットワーク構造の下で道路利用者は、始点Aから道路1あるいは道路2を通って中継点Bに至り、それから道路3を通して終点Cに至るのである。

この道路のネットワーク構造は、新規道路の建設前と建設後では変化しているため、道路利用者の各道路での交通量も変化する可能性がある。そのため、新規道路建設による投資便益を測定するためには、新規道路のみならず既存道路での便益の変化も考慮に入れなければならないことになる。そこで、道路利用者の需要関数と供給関数を導入して各道路でのフルプライスと交通量を求めてみる。

はじめに、需要関数の性質から検討していくことにする。道路利用者の数は通常1人ではなく多数であるため個人の需要関数と市場の需要関数を区別しなければならない。また、個人あるいは市場の需要関数に基づいて消費者余剰を計算するため、需要関数のタイプも示しておかなければならない。すなわち、マーシャルの需要関数なのか、ヒックスの補償的需要関数なのかという問題である。

さらに、各道路利用者の消費者余剰の大きさがその便益を表わしているが、それらの消費者余剰を集計した道路利用者全体の集計的消費者余剰が集計的便益を表わしている保証はない。つまり、集計の過程で各道路利用者に社会的重要度のウェイトを付ける必要があるからである。このようなことから需要関数に次のような前提を設けることにする。

第1に、需要関数はマーシャルの需要関数を利用する。これは、交通への需要は本源的需要であるよりも派生的需要であることの方が多いため所得効果が小さくなり、ヒックスの補償的需要関数とそれほど違いがなくなることと、取り扱いが容易になるからである。もちろん、線積分の経路独

立性³⁾の問題は残っている。

第2に、消費者余剰の集計に関して「補償原理」⁴⁾が成り立っているものと想定する。この想定により市場需要曲線に基づいて求められた集計的消費者余剰が、各道路利用者の個別便益を集計した社会的便益を表わすことになる。

これらの前提により、マーシャルの市場需要関数に基づいて集計的消費者余剰を計算することによって社会的便益を求めることが可能になる。

次に、供給関数の性質についてみる。第1に、供給関数は費用関数に基づくが、何を費用として計上するかによってその形状が異ってくる。たとえば、ある道路で x 台の車が走行するときの社会的費用(SC)は、私的走行費、所要時間の価値、道路の維持管理費、公害費用などから成り立っている。すなわち、

$$SC = C_a(x) \cdot x + C_b(x) + C_c(x) \quad (1)$$

$$\frac{dC_a}{dx} \equiv C_a' \geq 0, \quad \frac{dC_b}{dx} \equiv C_b' \geq 0, \quad \frac{dC_c}{dx} \equiv C_c' \geq 0$$

ただし、 C_a =1台当りの私的走行費+所要時間の価値、 C_b =道路の維持管理費、 C_c =公害費用、である。

もし、追加的に1台交通量が増加したならば、社会的限界費用(SMC)は、

$$SMC = C_a + C_a' \cdot x + C_b' + C_c' \quad (2)$$

となる。ここで、 C_a' は道路混雑が発生しない場合には私的走行費も所要時間費用も一定のためゼロであるが、道路混雑が発生する場合には走行費も時間費用も増加するため正の値をとる。そして、この走行費と時間費用の増加分を混雑費用と呼ぶことにする。 C_b' と C_c' は各々交通量の増加関

数であり、社会的に最適な資源配分のためには交通量に応じて変化するような料金，あるいは税金を道路利用者に課することが望ましい。しかし本論文では，単純化のため道路の維持管理費も公害費用もゼロであると想定する。

通常，混雑費用を道路利用者は負担しないため，追加的な交通量 1 単位当りに課せられる私的限界費用（ PMC ）は社会的平均費用（ SAC ）と等しくなる。

$$PMC = SAC = C_a(x)$$

ただし， $C_a(x)$ は，交通量 1 単位当りの走行費と時間費用から構成されている。

そのため，追加的な交通量 1 単位当りの社会的限界費用と私的限界費用は混雑費用の分だけ乖離することになる。そこで，もし道路利用者に混雑費用に相当する分だけ混雑税を課するならば，社会的限界費用と私的限界費用は一致することになる。

このようなことから供給関数は，混雑税が課されないケースでは社会的平均費用曲線に基づくことになり，混雑税が適切に課されるケースでは社会的限界費用曲線に基づくことになる。

なお，生産者余剰についてであるが，平均費用に基づいて供給が決定される場合生産者余剰は発生しない。なぜなら，生産者余剰が発生するためには，平均費用を上回る供給価格が設定される必要があるからである。このため，混雑税が課されないケースでは生産者余剰が発生せず，消費者余剰だけを問題にすれば良いことになる。それに対して，混雑税が課されるケースでは供給曲線が社会的限界費用曲線に基づくため生産者余剰が発生する。しかしながら，この生産者余剰の大きさは混雑税の総額と一致するため，直接生産者余剰の大きさを計算しなくてもよいことになる。

本論文では分析の単純化のため供給関数に関して次のような前提を設けることにする。

第1に，既存の道路2，3では混雑が発生するが，新規の道路では混雑が発生しない。これにより，新規道路の供給曲線は水平であるのに対し，既存道路の供給曲線は右上りとなる。⁵⁾

第2に，既存道路の混雑に対し，道路当局は混雑税を課さない。この想定により，既存道路の供給曲線は社会的平均費用曲線に基づくことになる。そして，私的限界費用曲線に一致する。⁶⁾

これらの想定により供給曲線は社会的平均費用曲線に基づくため生産者余剰は発生しないことになる。

以上の前提から，各道路での需要関数と供給関数を定式化しておく。

2.2 需要関数，供給関数

はじめに，始点Aから終点Cまでの交通の総需要 x^d の定式化を行う。

$$x^d = x^d(p) \tag{3}$$

$$\frac{dx^d}{dp} < 0$$

ただし， p ＝交通の総需要のフルプライス（＝走行費＋時間費用）である。

次に，交通の総需要の下で，各道路1，2，3について個別需要も発生する。しかしながら，各個別需要は他の道路での需給の状況によってシフトし，最終的には各道路での需給均衡を成立させるように決まらなければならない。そのため，各個別需要は各道路でのフルプライスだけでなく，他の道路のフルプライスにも依存することになる。

$$x_i^d = x_i^d(p_1, p_2, p_3) \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

$$\frac{dx_i^d}{dp_i} < 0, \quad \frac{dx_i^d}{dp_j} \leq 0 \quad (i \neq j)$$

供給関数については、需要関数の場合と異なり、個別道路での供給関数からみていく。個別の供給関数は、各道路での費用関数に基づくが前節での混雑税に関する前提により、社会的平均費用曲線に基づくことになる。

$$x_1^s = x_1^s(\bar{p}_1) \quad (5)$$

$$x_i^s = x_i^s(p_i) \quad (i=2, 3) \quad (6)$$

$$\frac{dx_i^s}{dp_i} > 0$$

ただし、 \bar{p}_1 ＝道路 1 のフルプライス（道路 1 の供給曲線は前提により水平のためフルプライスは一定）、 p_i ＝道路 i のフルプライス、である。

これらの個別道路の供給関数に基づいて始点 A から終点 C までの総供給関数が決定される。しかし、道路のネットワーク構造の違いによって総供給関数の形状も異なってくる。そこで、次の第 3 章で総供給関数を導出し、それに基づいて新規道路を建設した場合の便益を測定してみる。

3. 道路投資便益の測定

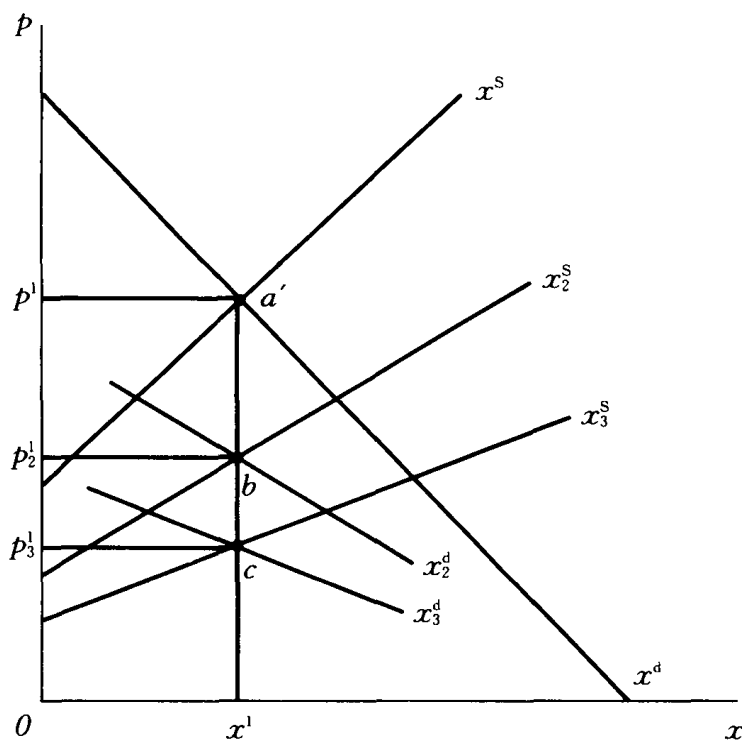
3.1 総供給曲線の導出

道路のネットワーク構造の違いによって総供給関数の形状も異なってくることを、図 1 のネットワーク構造に基づいて調べてみる。

新規道路 1 が建設される前の道路ネットワークは、道路 2 と道路 3 によって構成されていた。そこで、総供給曲線を求めるためには、道路 2 と道路 3 の個別供給曲線を垂直に合計すればよいことになる。それを示した

のが図2である。図2の横軸は交通量，縦軸はフルプライスを表わす。そして， x^d は総需要， x^s は総供給を表わす。

図2



この図2の総需要と総供給が一致する所で均衡フルプライス p^1 と均衡交通量 x^1 が決定される。さらに，均衡交通量 x^1 と各個別供給曲線から各道路でのフルプライス p_2^1, p_3^1 も決定される。そして，各個別需要曲線もこれらの個別フルプライスを実現するように決定される。

新たに新規の道路1が建設されると道路のネットワーク構造が変化する。すなわち，新規道路1と既存道路2は並列関係になり，既存道路3はこれら2つの道路に対して直列関係になる。このとき，新規道路建設の効果を測定するためには道路ネットワークの構造から内生的に決まってくる均衡条件を考慮に入れる必要がある。

第1に，新規道路1と既存道路2は並列関係にあるため両市場でのフルプライスは一致しなければならない。もし両者のフルプライスが異なるな

らば、より低いフルプライスの道路の需要が増加し、より高いフルプライスの道路の需要が減少するという調整が行われる。その結果一致したフルプライスが $p_{1,2}^2$ である。 $(p_{1,2}^2 = p_1^2 = p_2^2)$ という関係が成り立っている。

第2に、道路利用者は道路1と道路2の費用を比較しながらより低い費用の道路を利用することから、道路1と道路2のいずれもが利用できる場合、道路1と道路2の供給曲線を水平に合計して合成供給曲線を導出することができる。

第3に、道路3は道路1、道路2に対して直列の関係にあるから、道路1と道路2の合成供給曲線と道路3の供給曲線を垂直に合計すると総供給曲線が導出できる。

これらの条件の内、第1の条件はワードロップの第1原理 (Wordrop's first principles) に対応する。そして、第2の条件は第1の条件が成立するための必要条件でもある。

このようにして導出した総供給曲線を示したのが図3である。

図3 新規道路建設後の市場均衡

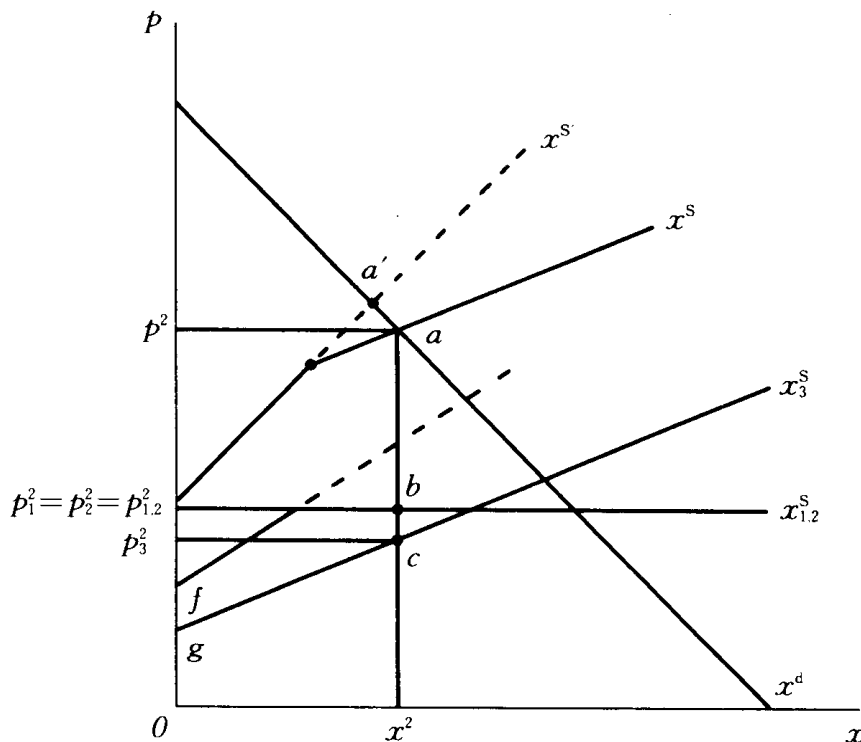


図3の総需要曲線と総供給曲線から均衡フルプライス p^2 と均衡交通量 x^2 が決定される。ひとたび均衡交通量 x^2 が決定されると、道路3のフルプライス p_3^2 が決定され、同様に、道路1と2の合成供給曲線から道路1と道路2の均衡交通量 x_1^2 と x_2^2 が決定される。

3.2 道路建設の便益の測定

前節の結果に基づいて新規道路建設の便益を測定してみる。そこで、図4を利用する。

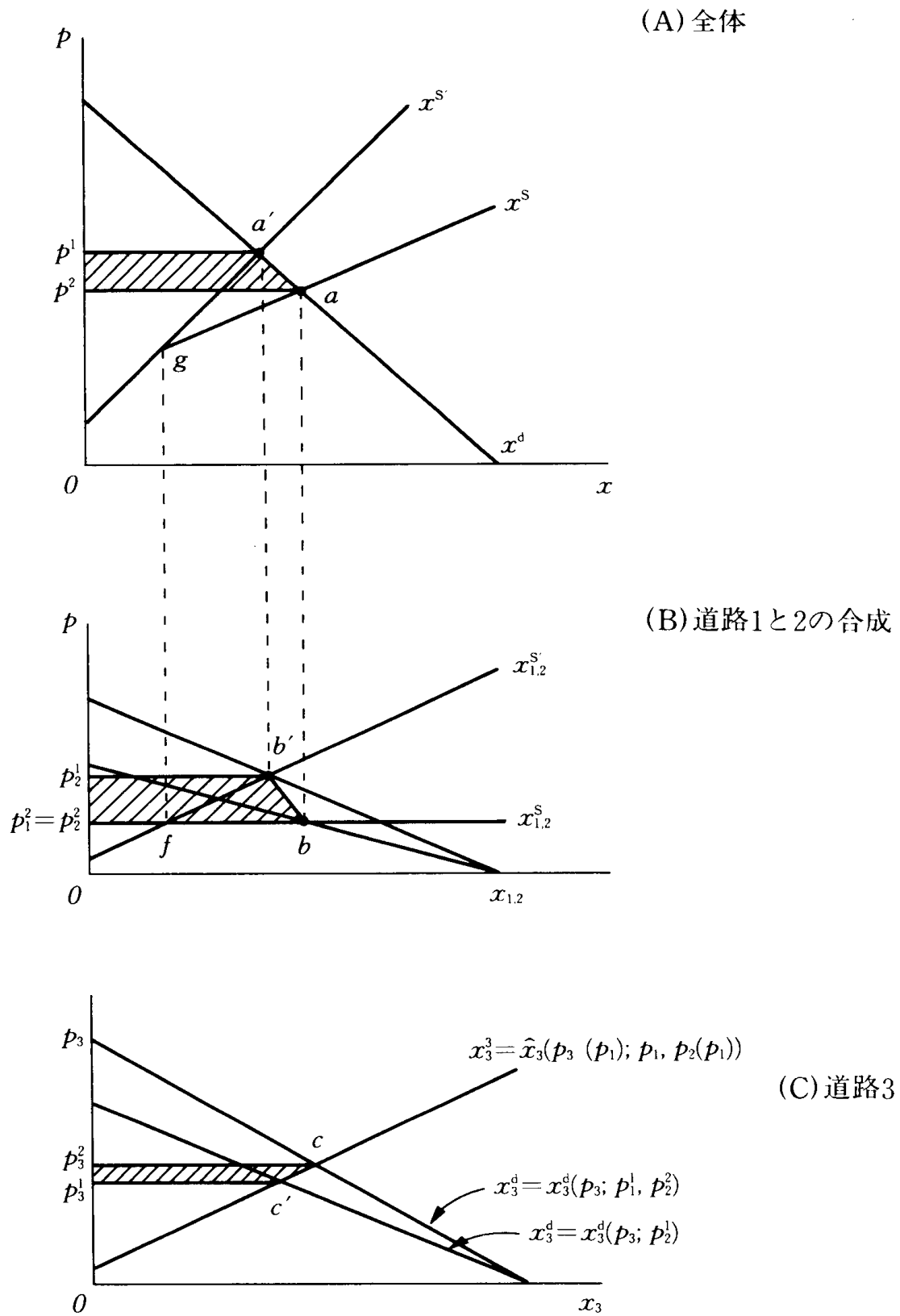
図4の(A)は、新規道路建設の効果を道路全体について示している。ここで、新規道路の建設により均衡点は点 a' から点 a に移動している。(B)は、道路1と道路2の合成した需給を示している。新規道路の建設により供給曲線は $x_{1,2}^s$ から $x_{1,2}^s$ にシフトし、それに応じて需要曲線も下へシフトしている。(C)は、道路3での需給を示している。新規道路建設前の需要曲線は $x_3^d(p_3; p_1^1)$ 、建設後の需要曲線は $x_3^d(p_3; p_1^2, p_2^2)$ である。しかし、Mohring [5] のいう「真の」(real) 需要曲線は $\hat{x}_3(p_3(p_1); p_1, p_2(p_1))$ であり、供給曲線 x_3^s に対応している。(D)は道路1での需給を示している。真の需要曲線は、 $\hat{x}_1(p_1; p_2(p_1), p_3(p_1))$ である。(E)は道路2での需給を示している。真の需要曲線は $\hat{x}_2(p_2(p_1); p_1, p_3(p_1))$ である。

このような図4に基づいて新規道路建設の便益を測定してみる。

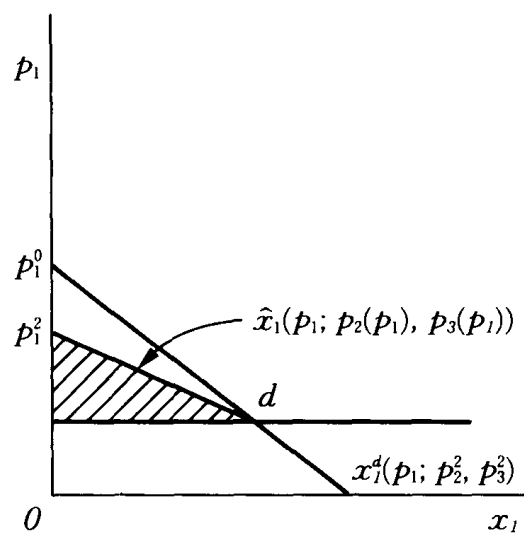
第1に、新規道路建設の便益は総需要曲線と総供給曲線に基づいて求めることができる。図4の(A)で均衡点が点 a' から点 a に移動しており、総供給曲線が社会的平均費用曲線に基づいていることから、消費者余剰の変化分 $p^2 a - a' p^1$ が新規道路建設の便益の大きさとなる。

第2に、新規道路建設の便益は、個別道路での便益の合計に基づいても測定することができる。図4の(D)と(E)の真の需要曲線に基づいて道路1と道路2の便益を求めると各々の斜線の領域になる。この2つの便益に基づいて道路1と2の合成便益を求めると(B)の斜線の領域になる。

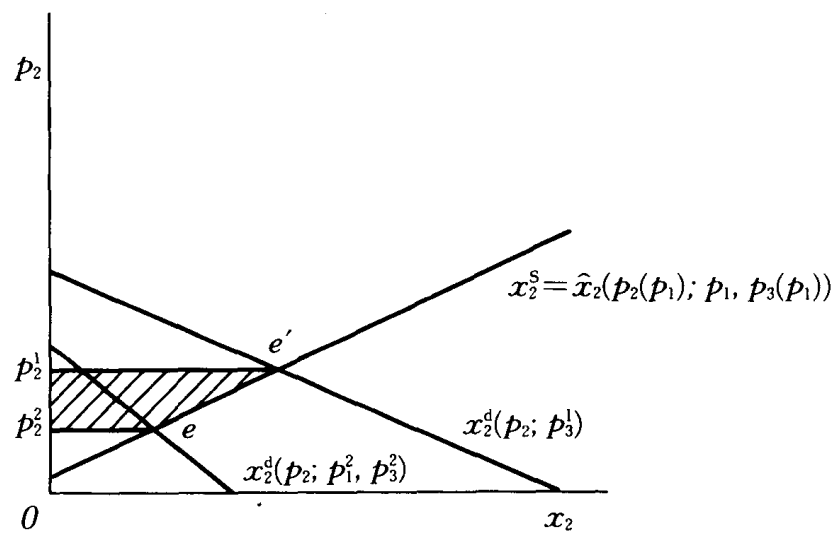
図4 新規道路建設の便益



(D) 道路1



(E) 道路2



ここで、領域 $\Delta b \ b' \ f$ は道路 1 の便益、領域 $p_1^1 \ b' \ f \ p_1^2$ は道路 2 の便益に対応している。また、(C) は道路 3 での便益（ただし、消費者余剰が減少しているためマイナスの便益）を示している。これらから、(B) の領域 $p_1^1 \ b' \ b \ p_1^2$ から (C) の領域 $p_2^1 \ c \ c' \ p_2^3$ を引いたものが (A) の領域 $p^1 \ a' \ a \ p^2$ に等しくなることがわかる。そのため、各道路での消費者余剰の変化分を合計すると全体での消費者余剰の変化分に等しくなる。

このような図に基づく分析は直感的であるが厳密であるとはいえない。そこで、グラフ理論に基づいてより厳密な議論を行ってみる。

4. グラフ理論の適用

4.1 グラフ理論の基本概念⁷⁾

前章では新規道路建設の効果を経済学的な論理に基づいて検討した。しかしながら、このような方法が可能であったのは道路のネットワーク構造が極めて単純であったことに依存する。もし、より複雑なネットワーク構造であったならこのような方法では解決できないであろう。そのため、ネットワークの構造それ自体を分析する手法が必要になってくる。そこで、いくつかの点とそれらの点の間のいくつかの枝との間の接続構造に関する諸性質を明かにするための理論であるグラフ理論を適用していくことにする。

まず、グラフ (graph) とは、いくつかの点 (node) とそれらの点の対を両端とする枝 (branch) によって表わされるような図形のことをいう。そして、グラフ G の点集合 V と枝集合 E を用いて、

$$G=(V, E)$$

と表わす。

グラフ $G=(V, E)$ の枝 $k \in E$ の両端点が $u, v \in V$ であるとき、枝 k は点 u, v に接続している (incident) といい、点 u と点 v は互いに隣接している (adjacent) という。

グラフ $G=(V, E)$ において、枝 $k \in E$ が点 $u, v \in V$ を両端点とし、 u から出て v に入る向きをもつとき、枝 k は点 u, v にそれぞれ正、負の向きに接続しているといい、点 u, v をそれぞれ枝の始点、終点という。2つの枝 k, l が同時に同じ始点 u 、終点 v をもつとき、これらの枝を並列枝または多重枝という。

グラフ G の $l+1$ 個の点 v_0, v_1, \dots, v_l と l 個の枝 k_1, k_2, \dots, k_l を交互に並べた系列,

$$P=(v_0, k_1, v_1, k_2, \dots, k_l, v_l) \quad (7)$$

において、すべての $i(=1, 2, \dots, l)$ に対して,

$$\begin{aligned} k_i &= (v_{i-1}, v_i) \\ (k_i &= (v_i, v_{i-1})) \end{aligned} \quad (8)$$

であるとき、この P を点 v_0 から点 v_l への長さ l の道 (path) という。

長さ l の道の始点と終点とが同一の点であるとき、この道を長さ l の閉路 (circuit) という。同じ枝を2度以上通らないような閉路は単純な閉路という。

単純な閉路は (符号付きの) 枝の集合によって表わされる。この枝集合を特にタイセット (tie-set) という。

グラフ $G=(V, E)$ の点集合 V の2つの部分集合への分割 (X, \bar{X}) に対して、一方の端点が X に含まれ、他方の端点が \bar{X} に含まれるような枝の集合 $C(X, \bar{X})$ をカットセット (cut set) という。

グラフ $G=(V, E)$ のいかなるタイセット（有向グラフでは枝の符号を無視する）をも部分集合として含まないような極大な枝集合 $T \subset E$ を G の木（tree）という。グラフ $G=(V, E)$ の 1 つの木 T に含まれない枝集合 $\bar{T}(=E-T)$ を木 T に関する補木（cotree）という。

グラフ $G=(V, E)$ の 1 つの木 T はタイセットを含まない極大な枝集合であるから、補木 $\bar{T}=E-T$ のどの枝 l に対しても $T \cup \{l\}$ はタイセットを含むことになる。

有向グラフ $G=(V, E)$ の接続行列（incidence matrix） $A=[a_{pk}]$ とは、各行 p が点 $p \in V$ に、各列 k が枝 $k \in E$ に対応し、各要素が、

$$a_{pk} = \begin{cases} +1 : \text{点 } p \text{ が枝 } k \text{ の始点の場合} \\ -1 : \text{点 } p \text{ が枝 } k \text{ の終点の場合} \\ 0 : \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

で与えられる $|V| \times |E|$ の行列をいう。

有向グラフ $G=(V, E)$ のタイセット行列（tie-set matrix） $B=[b_{ik}]$ とは、各行 i が G の初等的な閉路（タイセット） L_i に、各列 k が枝 $k \in E$ に対応し、各要素 b_{ik} がそれぞれ、

$$b_{ik} = \begin{cases} +1 : \text{閉路 } L_i \text{ で枝 } k \text{ が正の向き} \\ -1 : \text{閉路 } L_i \text{ で枝 } k \text{ が負の向き} \\ 0 : \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

で与えられる $|L| \times |E|$ 行列をいう。ただし、 L は G のすべての初等的なタイセットの集合を表わす。

グラフ $G=(V, E)$ の 1 つの木の基本タイセットに対応する行によるタイセット行列 B_f を T の基本タイセット行列という。 B_f の行, 列を適当に並び換えると,

$$B_f = \begin{bmatrix} \overline{T} & T \\ \widehat{B_\tau} & \widehat{1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

と表わせる。この B_τ を B_f の主要部 (principal part) という。

有向グラフ $G=(V, E)$ のカットセット行列 $Q=[q_{ik}]$ とは, 各行 i が G の初等的なカットセット Q_i に, 各列 k が枝 $k \in E$ に対応し, 各要素 q_{ik} がそれぞれ,

$$q_{ik} = \begin{cases} +1 : q_k \text{ で枝 } k \text{ が正の向き} \\ -1 : q_k \text{ で枝 } k \text{ が負の向き} \\ 0 : \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる $|Q| \times |E|$ 行列をいう。ただし, Q は G のすべての初等的なカットセットの集合を表わす。

グラフ $G=(V, E)$ の 1 つの木 T に関する基本カットセットに対応する行のカットセット行列 Q_f を T の基本カットセット行列という。この Q_f の行, 列を適当に並び換えると,

$$Q_f = \begin{bmatrix} \overline{T} & T \\ \widehat{Q_\lambda} & \widehat{1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

と表わせる。この Q_λ を Q_f の主要部という。

以上のようなグラフ理論に基づいて道路のネットワーク構造を分析するのであるが, 道路における交通の性質が電気回路理論の電流, 電圧の性質と類似していることから電気回路理論についても検討しておくことにする。

4.2 キルヒホッフの法則

電気回路理論には様々なテーマが含まれているが、電気回路の方程式を構築するのに重要な役割を果たすのがキルヒホッフ (kirchhoff) の法則である。このキルヒホッフの法則は、回路の接続点に出入する電流の代数和に関する電流則と、回路内の環状路を一巡するときの電圧の代数和に関する電圧則の2つから成り立っている。そこで、電流則からみていくことにする。

[キルヒホッフの電流則]

任意の点に流入する電流の代数和はあらゆる瞬間においてゼロである。

この電流則をグラフ理論を用いて述べると、「グラフ $G(V, E)$ のいずれの点においても、その点に正（負）の向きに接続されている枝の枝電流に $+1$ (-1) の係数を付け、その点に接続されている枝すべてに関してその和をとると、任意の時点で常にゼロになる」ということである。

点集合が $V = \{1, 2, \dots, n\}$ で、枝集合が $E = \{1, 2, \dots, m\}$ であるグラフ G の枝 k の枝電流 i_k を第 k 成分とする m 次元の列ベクトル $i = (i_1, i_2, \dots, i_m)^t$ を回路 $N(G)$ の枝電流ベクトルという。このとき電流則の方程式は接続行列 $A = [a_{pk}]$ を用いると、

$$A i = 0 \quad (11)$$

と表わせる。

A の階数を ρ とすると、 n 個の方程式の内 ρ 個だけが1次独立な式で残りの式はこれら ρ 個の式の1次従属となる。そして、 ρ 個の1次独立な式に基づく行列を G の既約接続行列 $A^* = [a_{pk}]$ ($p = 1, 2, \dots, \rho, k = 1, \dots, m$) といい、

$$A^* i = 0 \quad (12)$$

と表わすことができる。

グラフ G の木 T が $T = \{1, 2, \dots, \rho\}$ のとき, この木 T に関する基本カットセット行列 Q_i を用いると, 既約接続行列の式と同値な,

$$Q_i i=0 \quad (13)$$

という式が得られる。

[キルヒホッフの電圧則]

任意の 1 つの閉路についてその向きを考えた場合, 閉路に沿って一巡するときに各枝の電圧の代数和は任意の瞬間においてゼロである。

この電圧則をグラフの理論を用いて述べると, 「グラフ $G=(V, E)$ のいかなるタイセットに対しても, そのタイセットに正 (負) の向きに含まれている枝の枝電圧に $+1$ (-1) の係数を付け, そのタイセットに含まれている枝すべてについて和をとると, それは任意の時点において常にゼロになる」ということである。

グラフ $G=(V, E)$ の枝 k の枝電圧 v_k を第 k 成分とする m 次元の列ベクトル $v=(v_1, v_2, \dots, v_m)^t$ とタイセット行列 $B=[b_{ik}]$ に対して, 電圧則の方程式は,

$$Bv=0 \quad (14)$$

と表わせる。

この電圧則は, グラフ G の木 T に関する基本タイセット行列 $B_f=[B_f \mid 1]$ を用いて,

$$B_f v=0 \quad (15)$$

と表わすこともできる。

ここで、電気回路で用いられる素子である抵抗について簡単にみておく。

線状の導体に電圧 v （ボルト）を加えると導体に流れる電流 i （アンペア）は一般に v のみの関数として表わされる。そして、 v と i の関係が線形の場合、

$$v=r \cdot i \quad (16)$$

と表わされる。この比例定数 r を抵抗という。この関係をオームの法則という。

しかし、 v と i の関係が非線形の場合、

$$v=r(i) \quad (17)$$

と表わされる。この非線形抵抗の場合抵抗の値をそのままでは定義できないので、その傾き、

$$\frac{dv}{di}=r'(i) \quad (18)$$

で抵抗値を表わし、微分抵抗と呼ぶ。

以上のようなキルヒホッフの法則と抵抗の性質に基づいてあらためて道路のネットワークを考えてみる。

4.3 グラフ理論に基づく道路ネットワーク構造

本節では、グラフ理論に基づいて道路ネットワーク構造を定式化してみる。そのために、交通と電気回路との対応関係を調べておくことにする。

電気回路における電流 i は交通量 x に対応し、電圧 v はフルプライス p に対応している。問題は抵抗であるが、フルプライスと交通量との間には供給関数で示される関係があり、通常非線形であるため、

$$p = x^{s-1}(x^s) \quad (19)$$

と表わされる。ただし、 x^{s-1} は供給関数 x^s の逆関数を表わしている。そのため、抵抗値は、

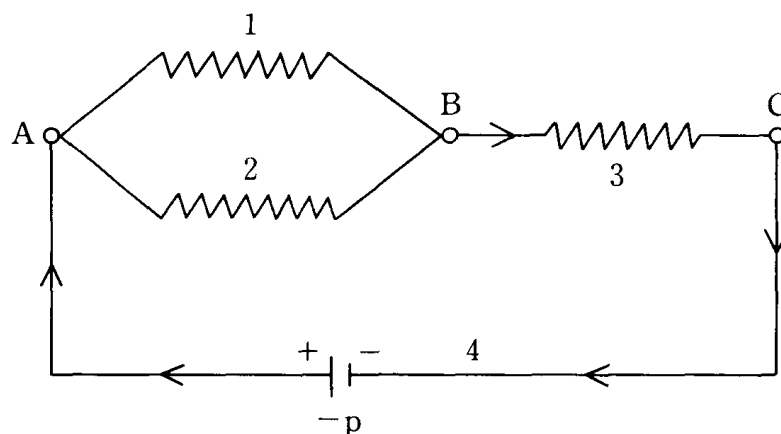
$$\frac{dp}{dx^s} = x^{s-1} \quad (20)$$

という微分抵抗として示される。

交通における電源に相当するものも考えてみると、始点Aから終点Cまで一定方向に交通流が生じており、フルプライスの値によって交通量が変化することから、フルプライスが直流の電圧源に相当するものとみなすことができる。

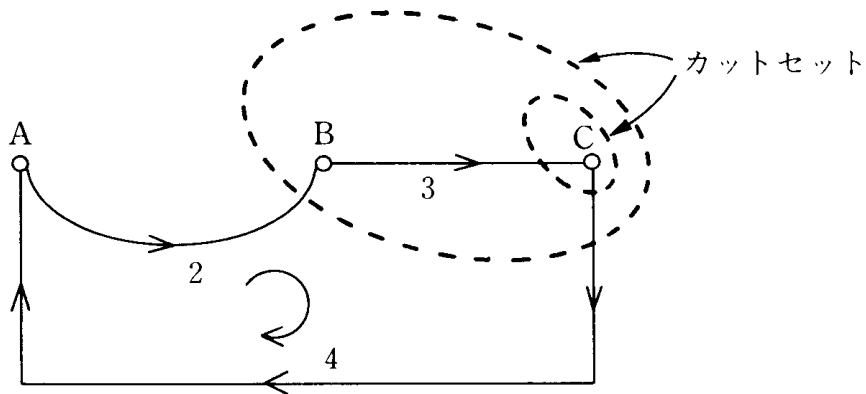
道路のネットワーク構造を電気回路に対応して書き換えると図5のようになる。この図で注意しなければならないのは終点Cから始点Aへの枝4が付け加わり、その枝4に独立電圧源 $(-)p$ が与えられていることである。

図5 電気回路の表示法



はじめに，新規道路 1 が建設される前の道路のネットワーク構造をみる。それを示したのが図 6 である。

図 6. 新規道路建設前の道路ネットワーク



この図に基づいて接続行列を求めると，

$$A = \begin{matrix} & \text{点} \backslash \text{枝} & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (21)$$

となる。そして，木を枝 2 と枝 3 とする。

$$T = \{2, 3\} \quad (22)$$

この木に関する基本カットセット行列は，

$$Q_f = \begin{matrix} & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (23)$$

であり，基本タイセット行列は，

$$B_t = 4 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

である。

そこで，キルヒホッフの電流則から，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^s \\ x_3^s \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

となり，キルヒホッフの電圧則から，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

となる。また，各枝での電流・電圧関係から，

$$p_4 = -p \quad (27)$$

$$p_2 = x_2^{s-1}(x_2^s) \quad (28)$$

$$p_3 = x_3^{s-1}(x_3^s) \quad (29)$$

となる。後の 2 式の逆関数をとると，

$$x_2^s = x_2^s(p_2) \quad (30)$$

$$x_3^s = x_3^s(p_3) \quad (31)$$

となる。これらの方程式体系は、方程式が 6 本、内生変数が $x_2^s, x_3^s, x, p_2, p_3, p_4$ の 6 個、そして外生変数が p の 1 個である。これらの式を整理すると、

$$p = p_2 + p_3 \quad (32)$$

$$x = x_2^s = x_3^s \quad (33)$$

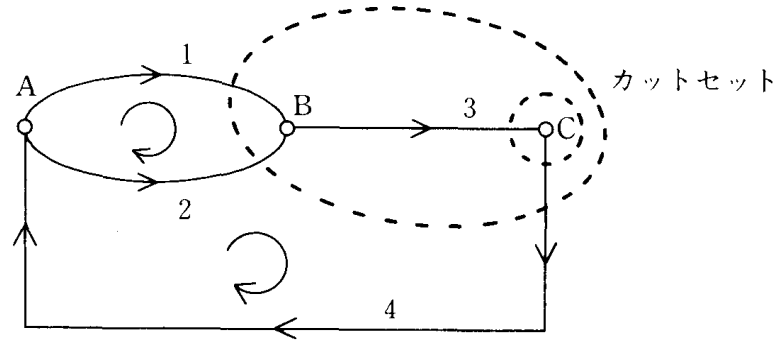
$$x_2^s = x_2^s(p_2) \quad (34)$$

$$x_3^s = x_3^s(p_3) \quad (35)$$

となる。これらの式は第 3 章の図 2 に対応している。そのため、グラフ理論に基づくと図 2 の内容を定式化できることになる。

次に、新規道路 1 が建設された後の道路のネットワーク構造をみる。それを示したのが図 7 である。

図 7. 新規道路建設後の道路ネットワーク



この図に基づいて接続行列を求めると、

$$A = B \begin{array}{c|cccc} \text{点} \backslash \text{枝} & 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline A & 1 & 0 & 1 & -1 \\ B & -1 & 1 & -1 & 0 \\ C & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \quad (36)$$

となる。そして、木を枝 2, 3 とする。

$$T = \{2, 3\} \quad (37)$$

この木に関する基本カットセット行列は,

$$Q_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (38)$$

であり, 基本タイセット行列は,

$$B_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (39)$$

である。そこで, キルヒホッフの電流則から,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^s \\ x_3^s \\ x_1^s \\ x^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

となり, キルヒホッフの電圧則から,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_1 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

となる。また, 各枝での電流・電圧関係から,

$$p_4 = -p \quad (42)$$

$$p_1 = x_1^{s-1}(x_1^s) \quad (43)$$

$$p_2 = x_2^{s-1}(x_2^s) \quad (44)$$

$$p_3 = x_3^{s-1}(x_3^s) \quad (45)$$

となる。後の 3 式の逆関数をとると,

$$x_1^s = x_1^s(p_1) \quad (46)$$

$$x_2^s = x_2^s(p_2) \quad (47)$$

$$x_3^s = x_3^s(p_3) \quad (48)$$

となる。これらの方程式体系は、方程式が 8 本、内生変数が x_1^s , x_2^s , x^s , p_1 , p_2 , p_3 , p_4 の 8 個、そして外生変数が p の 1 個である。これらの式を整理すると、

$$x_1^s + x_2^s = x^s \quad (49)$$

$$x_3^s = x^s \quad (50)$$

$$p_1 = p_2 \quad (51)$$

$$p_2 + p_3 = p \quad (52)$$

$$x_i^s = x_i^s(p_i) \quad (i=1, 2, 3) \quad (53)$$

となる。これらの式は第 3 章の図 3 に対応している。

このようにグラフ理論に基づけば道路ネットワークの構造が与えられたときの総供給や個別道路の供給が定式化できることが明らかになった。そのため、別途総需要関数が与えられれば総需要と総供給を一致させる均衡フルプライス p が決定され、個別道路の需要関数も定式化できることになる。しかしながら、各需要関数や供給関数の関数形が特定されておらず、しかも非線形であるため具体的な値を求めることができない。そこで、仮設例を用いて具体的に解いてみることにする。

4.4 仮設例

道路ネットワークの構造が与えられたときの方程式体系の解を具体的に求めるために仮設例を用いることにする。

個別道路での供給関数の逆関数（＝費用関数）を，次のように与える。

$$p_i = C_i x_i^s \quad (i=1, 2, 3) \quad (54)$$

ただし， C_i は一定の係数

また，総需要関数を，

$$x^d = \alpha p + \beta \quad (55)$$

ただし， $\alpha (<0)$ と $\beta (>0)$ は一定。

と与える。

このとき，新規道路建設前の均衡条件からみてみることにする。

総供給関数を導出するため，

$$p = p_2 + p_3 \quad (56)$$

$$x^s = x_2^s = x_3^s \quad (57)$$

$$p_2 = C_2 x_2^s \quad (58)$$

$$p_3 = C_3 x_3^s \quad (59)$$

という条件を用いる。これらから，

$$x^s = \frac{p}{C_2 + C_3} \quad (60)$$

という関係を得る。この式は，フルプライス p が与えられたとき総供給量 x^s が決定されることを表わす。また，この式を用いると，

$$p_2 = \frac{C_2}{C_2 + C_3} p \quad (61)$$

$$p_3 = \frac{C_3}{C_2 + C_3} p \quad (62)$$

という関係も得られる。

総供給関数と総需要関数から，均衡では，

$$x^d = x^s \quad (63)$$

となるため，均衡フルプライスと均衡交通量が決定される。

$$p^1 = \frac{(C_2 + C_3) \beta}{1 - \alpha (C_2 + C_3)} \quad (64)$$

$$x^1 = \frac{\beta}{1 - \alpha (C_2 + C_3)} \quad (65)$$

そして，道路 2 と道路 3 のフルプライスも決定される。

$$p_2 = \frac{C_2 \beta}{1 - \alpha (C_2 + C_3)} \quad (66)$$

$$p_3 = \frac{C_3 \beta}{1 - \alpha (C_2 + C_3)} \quad (67)$$

次に，新規道路建設後の均衡条件をみる。まず，総供給関数を求めてみる。

$$x_1^s + x_2^s = x^s \quad (68)$$

$$x_3^s = x^s \quad (69)$$

$$p_1 = p_2 \quad (70)$$

$$p_2 + p_3 = p \quad (71)$$

$$p_1 = C_1 x_1^s \quad (72)$$

$$p_2 = C_2 x_2^s \quad (73)$$

$$p_3 = C_3 x_3^s \quad (74)$$

これらから，次の関係が得られる。

$$x^s = \frac{C_1 + C_2}{\Delta} p \quad (75)$$

ただし， $\Delta \equiv C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1$ である。

この式は，フルプライスを与えられたときの供給量を決める式なので総供給関数を表わす。

同様に，各道路での式も得られる。

$$x_1^s = \frac{C_2}{\Delta} p \quad (76)$$

$$x_2^s = \frac{C_1}{\Delta} p \quad (77)$$

$$x_3^s = \frac{(C_1 + C_2)}{\Delta} p \quad (78)$$

$$p_1 = \frac{C_1 C_2}{\Delta} p \quad (79)$$

$$p_2 = \frac{C_1 C_2}{\Delta} p \quad (80)$$

$$p_3 = \frac{C_3 (C_1 + C_2)}{\Delta} p \quad (81)$$

総需要と総供給が一致したところで均衡フルプライスと均衡交通量が決定される。

$$p^2 = \frac{\Delta \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \quad (82)$$

$$x^2 = \frac{(C_1 + C_2) \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \quad (83)$$

同様に，各道路での交通量とフルプライスも決定される。

$$x_1 = \frac{C_2 \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \quad (84)$$

$$x_2 = \frac{C_1 \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \quad (85)$$

$$x_3 = \frac{(C_1 + C_2) \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \quad (86)$$

$$p_1 = \frac{C_1 C_2 \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \quad (87)$$

$$p_2 = \frac{C_1 C_2 \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \quad (88)$$

$$p_3 = \frac{C_3 (C_1 + C_2) \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \quad (89)$$

新規道路建設前と建設後の均衡解から新規道路建設に基づく総消費者余剰の変化額を求めてみる。

$$\begin{aligned} \frac{(x^1 + x^2) \times (p^1 - p^2)}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\beta}{1 - \alpha (C_2 + C_3)} + \frac{(C_1 + C_2) \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{(C_2 + C_3) \beta}{1 - \alpha (C_2 + C_3)} - \frac{\Delta \beta}{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta} \right\} \\ &= \frac{\{2 (C_1 + C_2) \beta - 2 \alpha \beta \Delta - \alpha \beta C_2^2\} C_2^2 \beta}{2 \{1 - \alpha (C_2 + C_3)\} \{(C_1 + C_2) - \alpha \Delta\}} > 0 \quad (90) \end{aligned}$$

このように，供給関数と需要関数を線形と仮定すると総消費者余剰を具体的に計算できることになる。

5. まとめ

本論文では道路のネットワーク構造が与えられている場合の新規道路の建設の便益測定の問題を検討した。そして、ネットワーク構造が異なると便益の測定のための手順が異なってくることが明らかになった。また、道路のネットワーク構造の意味をより深くとらえるためにグラフ理論に基づいて分析した。そして、グラフ理論に基づいて新規道路建設の便益を具体的に計算してみた。これにより、グラフ理論が道路のネットワーク構造を分析する場合有効な方法論であることが示された。

参考文献

1. Agnello R. J. "Economic evaluation of highway system benefits." *Transportation Research* Vol 11. 1977, p.365-369
2. Kanemoto, Y. and K. Mera, "General equilibrium analysis of the benefits of large transportation Improvements," *Regional Science and Urban Economics*. Vol 15. 1985, p.343-363
3. Jara-Diaz, S. R. and T. L. Friesz, "Measuring the benefits derived from a transportation Investment," *Transportation Research*. Vol 16. 1982 (三友仁志訳「交通投資から形成される便益の計測」「高速道路と自動車」第25巻第12号。1982年p.50-57。同第26巻第1号, 1983年p.53-61)
4. Just, R. E, D. L. Hueth and A. Schmitz., *Applied Welfare Economics and Public Policy*. Prentice-Hall. Inc., 1982.
5. Mohring, H. *Transportation Economics*. Ballinger, Cambridge. 1976. (藤岡, 萩原監訳『交通経済学』勁草書房, 1987年)
6. Varian H. *Microeconomic Analysis* (2'ed) Norton. 1984.
7. Williams H. C. W. L. "Travel demand models, duality relations and user benefit analysis." *Journal of Regional Science*. Vol 16. p.147-166.
8. 藤岡明房, 「道路ネットワークと投資便益の測定」, 日本地域学会『地域学研究』第20巻(近刊)
9. 梶谷洋司, 篠田庄司, 『回路解析』, 日本理工出版会, 昭和54年。
10. 伊理正夫, 他3名, 『演習グラフ理論, 基礎と応用』, コロナ社, 昭和58年。
11. 尾崎弘, 白川功, 『グラフとネットワークの理論』, コロナ社, 昭和48年。
12. 森真作, 『電気回路ノート』, コロナ社, 昭和52年。
13. ロナルド・ローラー著, 齊藤正男, 篠崎寿夫訳, 『回路理論, 状態変数解析入門』, 学献社, 昭和48年。

- 注 1) 道路のネットワーク構造については拙稿〔8〕で経済学的論理に基づく分析を行っている。これは、Jara-Diaz, Friesz〔3〕の論文の中で示されている並列的ネットワーク構造の道路を、並列と直列から成り立つネットワーク構造の道路へ拡張したものである。しかしながら、拙稿での道路のネットワーク構造が依然として単純であることは否めない。そのようなことから、本論文は拙稿を発展させるための手法を示したものといえる。
- 2) 本論文では前者のネットワーク構造が相対的に簡単な場合について検討した。しかし、今後はネットワーク構造が相対的に複雑な場合についても検討しなければならないであろう。その場合には、回路理論の中の「ポート理論」が適用できる。
- 3) 経路独立性の問題については、Just, Hueth, Schmitz〔4〕とJara-Diaz, Friesz〔3〕を参照せよ。
- 4) ここでの「補償原理」の考え方は、通常補償原理の考え方と異なる。それについては、Mohring〔5〕の8章を参照せよ。
- 5) 道路1で混雑が発生しないという前提は絶対的なものではない。道路1で混雑が発生すると前提しても結果には大きな影響を与えない。
- 6) この前提も絶対的なものではない。もし完全な混雑税が課されるならば供給曲線は社会的限界費用曲線に基づくことになる。そして、道路投資の便益を測定するためには生産者余剰も考慮に入れなければならないことになる。
- 7) グラフ理論と回路理論についてはいくつかの文献を参考にした。しかし、それら全てを示すことはできないので今回特に利用したものだけを参考文献として示した。