

ニュートン-ラプソン法の初期値設定法

田 口 功

1. はじめに

ニュートン-ラプソン法は非線形方程式の解法として非常に有力で平方根の計算を行なう時など実際に使用されている。また5次以上の代数方程式では解を公式を用いて求める事は出来ない。この場合、ニュートン-ラプソン法が用いられる。

本稿において $f(x) = 0$ は相異なる実根を持つと仮定する。 $f(x) = 0$ の解を求める時、よく知られているように、ゲルシュゴーリンの定理(文献(2)(3)を引用)を用いて二分法の出発値を求める。そして二分法で反復計算を行ない、近似度を十分高める事により、ニュートン-ラプソン法の初期値として決定される。しかし、二分法は確実に解を求める事が出来るが、一次収束なので反復回数を多く必要とするという欠点が生ずる。また二分法では、区間 $[x_1, x_2]$ を定めた時、 $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ であれば、近似解を求める事が出来るが、 $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$ の場合これを二分法で確認するためには、区間をさらにいくつか分割する必要がある。

ニュートン-プラトン法自身の特徴を利用して初期値を設定する方法はまだ知られていない様である。また、区間内で f' の符号が変化する時、すなわち、3次以上の関数の場合簡単に収束条件を満たす初期値設定は出来ない。本論

文ではニュートン法を用いて、解を求めるアルゴリズムを見直し、収束領域に関する考察と、 $ff'' > 0$ を満たす初期値に対しては収束するという事実を組み合わせ、これに区間の二次近似を加えてニュートン-ラプソン法に適する初期値を求める方法を区間内に最大2個までの根が存在する場合考察した。以下二次近似関数に対して f_2 と記す事とする。すなわち、元関数 f に対して、区間内で二次近似された関数を f_2 とし、その微分された関数を f'_2 とする。 f_2 は区間内で3点が定まれば求まる。また、二次近似のパターンは14種類考えた。これは、ニュートン-ラプソン法において区間内で、 $|ff''/f'^2| < 1$ が常に成立し、 f の根が存在する時その値は0となるという事、 $|ff''/f'^2| \geq 1$ の時は根が存在しないか、ニュートン-ラプソン法を用いて確実に根を求める事ができない(解から離れる。特に $f' = 0$ の時は根を求める事が出来なく、発散してしまう。)という事を意味する。定理2・2, 定理2・3にこれを示す。さらに、文献(2)に示されたニュートン-ラプソン法の収束条件を利用して区間 I に $f'_2 = 0$ の根があり、2個までの根が存在した場合の近似解の収束条件を示した(定理3・1)。一般的にニュートン-ラプソン法では $f' \neq 0$ と仮定しているが $f' = 0$ 又は $f' \div 0$ の時が起こり得るので f/f' および ff''/f'^2 の値が非常に大き

くなって発散してしまう場合が起こり得る。したがって f' の根が区間 $I = [x_1, x_2]$ に存在する場合には、 f の根を区間内で求める事が難しくなる。そこで、これを防ぐ方法として区間 $I = [x_1, x_2]$ において、 f'' の値の符号が変化しない時 ($ff'' > 0$ という条件、および $|ff''/f'^2| < 1$ という条件を考慮)、 $0 < ff''/f'^2 < 1$ を満たす x を求める事が出来れば発散を防止する事が出来る。この x は区間 $I = [x_1, x_2]$ において、次の順序で行なわれる。(以下 α_1 とする。)

- ① $I = [x_1, x_2]$ において $x_1, x_2, (x_1 + x_2)/2$ の3点に対してそれぞれ f の値を求める。
- ② ①における3点に対して $f(x_1), f(x_2), f(x_1 + x_2)/2$ の値を求め、一つでも異符号の値があれば解が存在、そうでなければ解が存在する可能性が小さいが2次近似関数でもう一度調べる。
- ③ 3点を用い、区間に対する二次近似関数 $f_2(x)$ を求める。
- ④ 二次近似関数に対して根の方程式、又はニュートン法を使用し区間 $I = [x_1, x_2]$ に存在する近似根を求める。
解が1個又は2個、又は存在しないかを調べる。
- ⑤ 1個存在する場合はその解が $0 < ff''/f'^2 < 1$ の条件を満足するかどうかを調べる。満足する場合はその根をニュートン・ラプソン法に対する初期値として与え、そうでない場合には Dandelin の方法 (文献(8)) を用い、区間 $I = [x_1, x_2]$ 内における解の存在領域をせばめ区間 $I = [x_1, x_2]$ 内

に縮小された区間 $[x_{12}, x_{22}]$ をとり、①から⑤の操作を続ける。

また二次近似解が2個存在する場合は、二次近似関数 f_2 の微分 f'_2 の根を β_1 とすると、区間 $I_1 = [x_1, \beta_1)$ 、区間 $I_2 = (\beta_1, x_2]$ の二つの区間 I_1, I_2 に対して③④⑤の手順で近似解を求め操作を繰り返す。

ところで、従来からニュートン・ラプソン法を用いる場合、初期値の選択が、解の収束に決定的な影響を与える事が言われてきたが、(文献(4)) 本方法を利用する事によりこの問題は解決されるものと考えられる。すなわちニュートン・ラプソン法において、解の発散を防止する事が出来、精度を保障する Dandelin の方法の使用で解も確実に求まる。

2. 二次関数による近似

区間 $I = [x_1, x_2]$ において、関数 $f(x)$ は x の二次式で近似できるものと仮定し $f_2(x)$ とする。

区間 I で $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ でしかも、 f' と f'' の符号が変化しない場合必ず根が1個存在する。この場合、区間 I に f'_2 の根は存在せず、パターンは4通りに分かれる。(図1)。

図1における4つの曲線①, ②, ③, ④はそれぞれ以下の条件を満足する。

区間 I で

- ① $f_2(x)$ は2回連続微分可能
- ② $f_2(x_1) \cdot f_2(x_2) < 0$
- ③ すべての $x \in I$ に対して $f'_2(x) > 0$ あるいは $f'_2(x) < 0$ あるいは $f_2(x) = 0$
- ④ すべての $x \in I$ に対して $f''_2(x) \geq 0$ あ

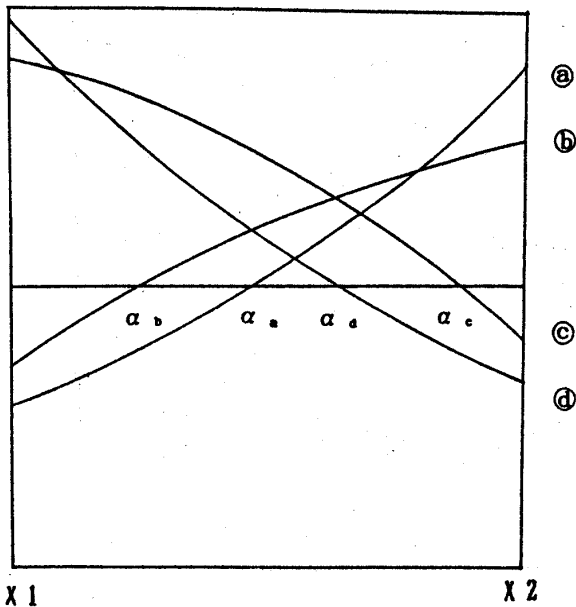


図 1 区間 I に $f' = 0$ が存在しなく、解が 1 個存在する場合
Fig.1 There is not a $f' = 0$ in interval $I=[x_1, x_2]$. A root exist in I.

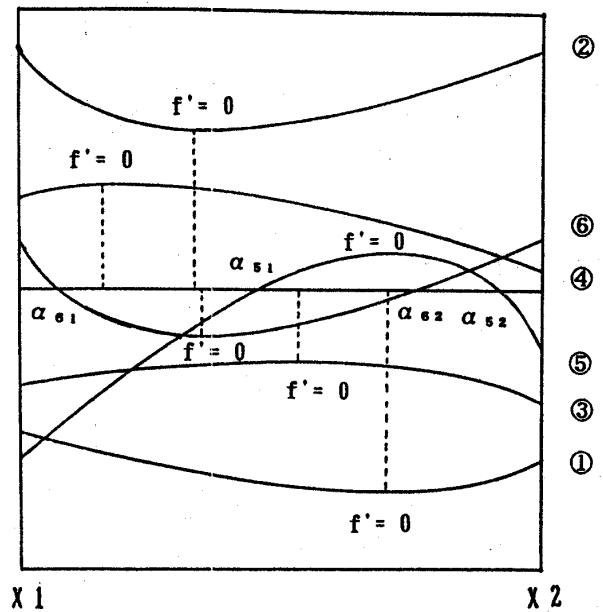


図 2 区間 I に $f' = 0$ が存在し、解 2 個または解が存在しない場合
Fig.2 There is a $f' = 0$ in interval $I=[x_1, x_2]$. Two roots exists or not in I.

るいは $f''_2(x) \leq 0$

- ⑤ $|f'_2(x_1)|$ か $|f'_2(x_2)|$ の小さいほうを与える x_1 あるいは x_2 を改めて c で表すと、

$$|f_2(c)| \leq (x_2 - x_1) |f'_2(c)|$$

を満足する時、任意の初期値 $x_0 \in I$ に対してニュートン-ラプソン法では、 I におけるただ 1 つの解 x^* に収束する (文献(2))。この 4 つの曲線 ① ② ③ ④ が基本的にはベースとなる。ここで、 $f'_2(x) \neq 0$ としている事に注意する。

区間 $[x_1, x_2]$ で $f_2(x_1) \cdot f_2(x_2) > 0$ の場合は、 f'_2 の符号が区間内で変化しないので、図 2 のように 6 通りのパターンが考えられる。

この 6 通りのパターンに対して、必ず 1 個の $f'_2(x) = 0$ の根が存在する。図 1 に示された 4 つの基本パターンが $f'_2(x) = 0$ の根を境にして 2 個含まれるパターンとなる。その根を

x_3 とおくと、 $f_2(x_3)$, $f_2(x_1)$, $f_2(x_2)$ の符号がすべて等しい時、解は存在しない (① ② ③ ④)。2 個の根が存在する場合は ⑤ ⑥ である。また、 $f_2(x_1) \cdot f_2(x_2) < 0$ という条件のもので、 f'_2 の符号が変化せず f'_2 の符号が 2 度変わる場合が、曲線 ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ というパターンである。この場合、1 個の f'_2 の根 f_2 の根が存在する。 f'_2 の根を x_3 と考える時、 $[x_1, x_3)$, $(x_3, x_2]$ の 2 つの区間に分離すれば基本パターンを用いて 1 個の解を求める事が可能となる。

① から ⑩ のパターンに対して、 $x_1 < x_3 < x_2$ とし、ここで $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ と置くと、

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix} \quad (1)$$

が成立する。これから

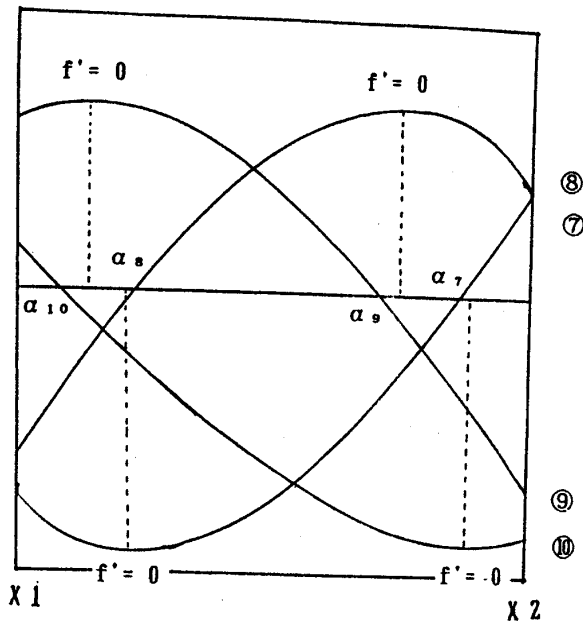


図 3 区間Iに $f' = 0$ が存在し、解が1個存在する場合
Fig.3 There is a $f' = 0$ in interval $I = [x_1, x_2]$. A root exist in I.

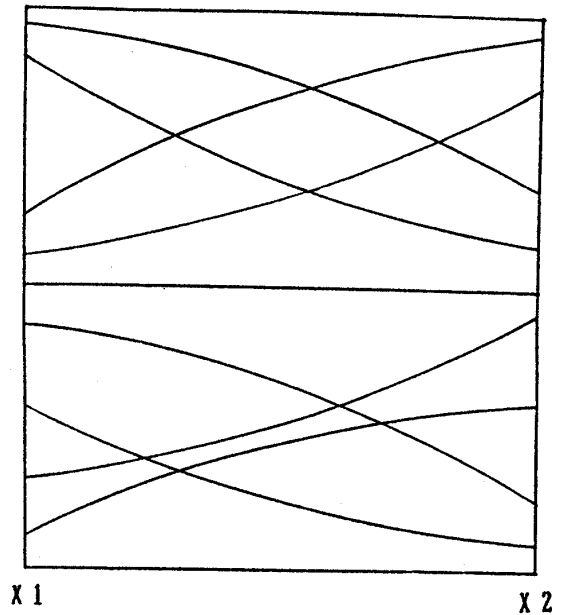


図 4 区間Iに $f' = 0$ が存在しなく、解も存在しない場合
Fig.4 A root and $f' = 0$ are not in interval $I = [x_1, x_2]$.

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} = A, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = Y, \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix} = b \quad (2)$$

とすれば(1)は次のようになる。

$$AY = b \quad (3)$$

ここで、 $x_1 < x_3 < x_2$ であるから行列Aは正則で、

$$Y = A^{-1}b \quad (4)$$

となる。ここでYの未知数は3で、方程式の数は3となる。

(4)式は次のように書き表わす事もできる。

$$\begin{aligned} a &= (f(x_1) - f(x_2)) / (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ &\quad - (f(x_2) - f(x_3)) / (x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \\ b &= -a(x_1 + x_2) + (f(x_1) - f(x_2)) / (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

$$c = f(x_1) - ax_1^2 - bx_1 \quad (5)$$

したがって二次近似式

$$f_2(x) = ax^2 + bx + c \quad (6)$$

が決定される。当然 f'_2 は

$$f'_2(x) = 2ax + b \quad (7)$$

となる。 f'_2 の根を x_4 とすると、

$$x_4 = -b/2a \quad (8)$$

となり、 f'_2 の根が存在するパターンに対して区間を2等分する事、および収束する初期値を求める条件を決定する準備を終える。パターン①から⑩に対して文献(2)のニュートン法の収束条件に関する定理を適用すれば、収束性を判断する事ができる。ただし、文献〔2〕では、 $f' = 0$ の場合が論じられていないが、本稿ではこれを避ける方法についてもあとで述べる。

ここで、 $f_2(x_1)$, $f_2(x_2)$, $f_2(x_3)$ または $f_2(x_4)$

(二次近似関数に関して区間内に零点がある場合)の値の符号が同じときは解が存在しない。逆に、一つでも符号が異なるときは1個又は2個の解が存在する。ここでは、2次関数で論じたが、これを $f(x)$ の近似と考えれば、一般にそうなる。これは次のようにまとめられる。

〔定理 2・1〕

$f(x)$ は区間 $I = [x_1, x_2]$ で次の条件を満足すると仮定する。

- ① $f(x)$ は2回連続微分可能
- ② 区間 I に $f' = 0$ の根を含む場合にはその根を x_3 とする (①および④の条件を仮定した場合判断できる)。そうでない時 $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ とする。ここで $I_1 = [x_1, x_3]$, $I_2 = [x_3, x_2]$ とおく。
- ③ すべての $x \in I_1$ または $x \in I_2$ に対して $f'(x) > 0$ あるいは $f'(x) < 0$ あるいは $f'(x) = 0$ 。
- ④ すべての $x \in I$ に対して $f''(x) \geq 0$ あるいは $f''(x) \leq 0$ 。

この時、区間 I_1 または I_2 に対して $f(x_1)f(x_2) < 0$ であれば区間 I_1 にただ1つの解が存在し、 $f(x_3)f(x_2) < 0$ であれば区間 I_1 にただ1つの解が存在する。

ここで解の発散について述べよう。パターン①～④に対しては、 $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ の符号が等しいので、解はない。従って区間を取り直して考えることになる。パターン⑤, ⑥では、 x_1 および x_2 で $ff''/f'^2 > 0$ となっており、 f' の根の近傍では ff''/f'^2 が非常に大きくなり、発散する可能性がある (文献(1))。収束条件は $|ff''/f'^2| < 1$ の関係が区間においてすべての x について成立しなければならないからで

ある (文献(1), 文献(7))。しかし、 $f' = 0$ の根から $ff'' < 0$ の関係を満足する領域を避けて初期値を設定すれば発散は防ぐ事が出来る。したがって初期値を $[x_1, \text{解1}]$, $[\text{解2}, x_2]$ に採る事により、発散が避られる。これは解のすぐ右側か左側 (少くともどちらか一方) で f と f'' の符号が同符号となることを利用する。これをまとめて次の定理を得る。

〔定理 2・2〕

パターン⑤, ⑥で $ff''/f'^2 > 0$ が $[x_1, x_2]$ で成立すれば、 x_1 および x_2 の値を初期値とすることにより、ニュートン法によって2個の解を求めることができる。すなわち区間 $[x_1, x_2]$ に対して二次近似根が元関数に対して条件 $ff''/f'^2 > 0$ を満足すればその近似根を初期値とする事ができる。

パターン⑦～⑩においても、 $f' = 0$ の根を P とし P で区間 $[x_1, x_2]$ を分割して考えれば、 $ff''/f'^2 > 0$ を満たす x が少なくとも一つ存在する。また、図1におけるパターン(a)(b)(c)(d)に対しても $ff''/f'^2 > 0$ を満たす x が存在する。すなわち、解の存在するすべてのパターンに対して、区間内で二次近似根が $[x_1, x_2]$ に存在し、 $ff''/f'^2 > 0$ の関係を満たせばその値をニュートン法に対する初期値とする事が出来る。まとめると、次の定理を得る。

〔定理 2・3〕

区間 $I = [x_1, x_2]$ で、すべてのパターンに対して、二次近似によって求めた根が $ff'' > 0$ の関係を満足すればその値をニュートン法の初期値として与える事により解を求める事ができる。

特に元関数が2次の場合を考える事とする。

平方根を求める時、例えば \sqrt{a} を求めてみよう。

$$f(x) = x^2 - a$$

であるから、

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

となる。したがって、 $x > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} ff''/f'^2 &= 2(x^2 - a)/4x^2 \\ &= (x^2 - a)/2x^2 \end{aligned}$$

となるから、

$$0 < ff''/f'^2 < 1$$

の条件を満足する初期値の条件は、

$$0 < (x^2 - a)/2x^2 < 1$$

となり正の実根を考えているため、

$$x > \sqrt{a}$$

の条件が満足される初期値を設定すれば解は収束するという事になる。すなわち平方根を求める時ニュートン法がよく使用されるのは、非常に大きな値（例えば $a = 2$ 程度の時 2^2 を初期値として与えておけば解は求まり、発散しない）を初期値として与える事により解は求まる。すなわち区間 $[0, \infty]$ に対して f' は正であり一定であるため考え方は非常に簡単になる。しかし、3次以上の関数に対しては、区間の2次近似が必要となると考えられる。

3. ニュートン法の収束条件と初期値設定法

ニュートン法による反復公式は次のように与えられている。

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \quad (9)$$

その収束条件としては、一般的に $|ff''/f'^2| < 1$ が成り立てばよい（文献〔1〕）。しかし、実際に反復計算を行なう場合、「この条件を満たす初期値をどのように求めたらよいか」ということについては、殆んど述べられていない。(9)式において真の解を β とし、

$$F(x) = x - f(x)/f'(x) \quad (10)$$

とおけば、収束時には、

$$F(\beta) = \beta - f(\beta)/f'(\beta) \quad (11)$$

$$F'(\beta) = f(\beta)f''(\beta)/f'^2(\beta) \quad (12)$$

となる。微小区間において $f' = 0$ の根と(11)、(12)式の関係を述べよう。収束時には(11)式の右辺の第2項目と(12)式の右辺の値は0となる。文献(1)、(2)から、収束領域では $|ff''/f'^2| < 1$ の関係を満たすから、 F' は収束条件を満足しながら、最終的には0となる減少関数である。これは、解が区間内に少なくとも1個存在するすべてのパターンについて成立する。 $ff'' > 0$ と $ff''/f'^2 > 0$ は同値だから $|ff''/f'^2| < 1$ と合わせて

$$0 < ff''/f'^2 < 1 \quad (13)$$

これをまとめて次の定理が得られる。

〔定理 3・1〕

区間 $[x_1, x_2]$ において元関数に対して二

次近似関数の根が、 $0 < ff''/f'^2 < 1$ の関係を満たせば近似根を初期値とする事により区間内に存在する元関数の根はニュートン法により求められる。

(証明)

一般にニュートン法の収束条件は、文献(1)、(2)から区間 I に対してすべての x に対し $|ff''/f'^2| < 1$ の関係が成立する時、ニュートン法を用いて解を求める事が出来るという事が述べられている。さらに $f' = 0$ の根を λ とし、 f の根を α とした場合に、区間 $[\lambda, \alpha]$ を除いた領域 ($ff'' < 0$) に対して $ff''/f'^2 > 0$ の関係と $|ff''/f'^2| < 1$ を満足する関係は $0 < ff''/f'^2 < 1$ となる。したがって2次関数で近似し、元関数に対し、その根が $0 < ff''/f'^2 < 1$ の関係を満足すれば近似根を初期値に設定する事によりニュートン法を使用する事で解は求まる。

(証明終わり)

しかし、区間 $[x_1, x_2]$ に対して1度二次近似関数を求め、その根が元関数に対して $0 < ff''/f'^2 < 1$ の関係を満足するとは限らない。例題においては5次方程式の近似解は以下の方法を使用しなくとも求める事ができた。区間内に解が1個存在する場合について述べれば2個の場合は $f' = 0$ の根を中心として2つの区間について考えればよい。そこで次の方法で二次関数近似を求め近似根を求める方法について述べる。

- ① 図1に示す基本パターン①について考える。
- ② 文献(8)におけるニュートン法の精度を保障する方法 (Dandelin の方法) を適用する。
- ③ 元関数に対し $f(x_1), f(x_2)$ の2点を通

る直線の方程式から x 軸と交わる点を x_{12} とする。

- ④ $ff'' > 0$ の条件を満たす x_1 又は x_2 から接線を引き x 軸との交点を x_{22} とする。
- ⑤ 二次近似に対して区間を $[x_{12}, x_{22}]$ ととり直して近似関数の根を求める。元関数に対して $0 < ff''/f'^2 < 1$ を確かめる。満足すればその値を初期値とする。そうでなければ⑥にもどり区間をさらに縮めて同様の操作を行なう。
- ⑥ パターン①②③④に対して区間 $[x_1, x_2]$ で $f' = 0$ の根は存在しないでこの操作は実行出来ると考えられる。

次に区間 $[x_1, x_2]$ に $f' = 0$ の根を含む場合を考察する。パターン⑤⑥⑦⑧⑨⑩がこの条件を満たす。

- ⑦ 最初に求めた二次近似関数に対して $f' = 0$ の根を求める。 $f' = 0$ に対する x 座標軸の値を x_3 とおく。
- ⑧ パターン⑤⑥に対しては区間 $[x_1, x_2]$ を2つの区間 $[x_1, x_3], [x_3, x_2]$ に対して③④⑤の操作をそれぞれ実行し計算を進める。
- ⑨ パターン⑦⑧⑨⑩に対しても同様の操作を行なう事により解を求める事が出来る。区間 $[x_1, x_3]$ 又は区間 $[x_3, x_2]$ において解が存在しない場合はもちろんこの操作を省略し、反復計算を行なう事が出来る。

4. 例 題

$$f(x) = (x+0.1)(x-0.1)(x-0.15)(x-1.0) \\ (x-2.0) = x^5 - 3.15x^4 + 2.44x^3 \\ - 0.2685x^2 - 0.0245x + 0.003$$

の方程式を解く事を考える。ここで、 $f(x)$ に対するコンパニオン行列を C とおくと、

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.15 & -2.44 & 0.2685 & 0.0245 & -0.003 \end{bmatrix}$$

となり、ここでゲルシュゴーリンの定理を適用すると、

$$|x-0| \leq 1$$

$$|x+0.003| \leq |3.15| + |2.44| +$$

$$|0.2685| + |0.0245| = 5.8830$$

の関係が成立し、0を中心とし、半径1の円内、または、 $x = -0.003$ を中心とし、半径5.8830の円内に解は存在するという事になる。この5次方程式に対して、確かに5個の根はこれらの円内に存在する。この方程式に対して、BASICの言語を用い、プログラム化した結果を表1に示す。表1において、Xは二次近似を行ない、ニュートン法を用いて計算を行なった場合の近似値を示す。2次の根の方程式を用いて計算を行なっても全く同じ結果が得られた。この事から従来二分法で反復計算を行なって十分真の解に近づけるという計算を1度で行なえるという事がわかる。KUKANN はきざみ幅に対する始点 (x_1)、終点 (x_2) の値をそれぞれ示す。真の根 -0.1 に対して二次近似を行ない区間 $[-0.14, -0.04]$ で近似解 -0.0992788 という値が求まっている。真の解 0.1 および 0.15 に対する近似解は同区間 $[0.0599999, 0.16]$ にあり、(解が2個存在する場合) 近似解はそ

れぞれ 0.0980737 , 0.147633 となる。5個の根に対して、二次近似式を用いた場合 $f_2 f_2' / f_2'^2 > 0$ となる事が(選択出来る事) $FX * FDDX$ の欄からわかる。また表2において、元関数に対して ff'' / f'^2 の計算を行ない収束性の評価を行なった。真の根 -0.1 に対しては -0.01521472 , 0.1 に対しては 0.0569659 , 0.15 に対しては、 -0.123127 , 1 に対して 1.96923×10^{-7} , 2.0 に対して、 3.03343×10^{-4} となっておりすべての近似根は $0 < ff'' / f'^2 < 1$ を満足していない。 0.1 に対して負、 0.15 に対して負となっているからである。しかし $ff'' / f'^2 < 1$ (ニュートン法の収束条件) の条件は満足されている。したがって求められた近似根はニュートン法の初期値となり得る。二次近似によって求められた初期値として設定し、15回の反復計算を行なった結果を表3に示す。真の根 -0.1 , $+0.1$, $+0.15$ の初期値 -0.0992788 , $+0.0980737$, $+0.147633$ に対していずれもニュートン法2回の反復で区間内に存在する解が確実に求められている。((1), (2), (3))。一方初期値 -0.0332955 に対し ff'' / f'^2 の値は -945.563 となる(4)の結果は13回の反復で求められている。さらに初期値 $+0.716705$ に対しても14回の反復計算が必要となっている((5)の結果)。初期値 0.766705 に対しては、初期値に一番近い解 1.0 は求まらず 2.0 の解が3回の反復計算で求められている。また、初期値 1.67 に対しては -0.1 の解が12回の反復計算を必要とし、初期値 1.7167 に対しては10回の反復に対し((8))、解2が求められている。さらに初期値 1.68 に対しては一番離れている -0.1 の解が求められている(反復回数15回実行)。(10)

の初期値 1.69 に対しては15回の反復では、どの解もとまっていない。初期値 0.73 に対しても15回の反復計算でどの解も求まっていない (11)。(4) から (11) はいずれも $|ff''/f'^2| > 1$ の時 (パソコン使用) の結果であり解が15回の反復で求まらなかったり、求まるにしても確実性に

かけたり、初期値に近い解が求まらなかったりしている事がわかる。結局反復回数の増加という結果が生じている。特に (12) (13) において (初期値 0.74、0.723 に対し) (12) は11回の反復で2に近づき、(13) は15回の反復で -0.1 に近づいていってしまい不安定である事がわかる。

表 1 例題プログラム (5 次方程式の初期値)

Table 1. Example Program (Initial Value of fifth equation)

```

100 '*****nyuton method initial value settei
110 REM PROGRAM MEI*****NYU2J1*****
120 '*****INITIAL VALUE SETTEI*****
130 LPRINT "NYUUTONN HOU NO SHOKITI NO SETTEI HOU"
140 LPRINT
150 LPRINT "F(X)=(X+0.1)*(X-0.1)*(X-0.15)*(X-1.0)*(X-2.0) NO SHOKITI NO KETTEI "
160 LPRINT "KAI*****X*****FX*FDDX*****KUKANN*****"
170 X0=-2.44:XR=.1:HANX1=0:HANX2=0
180 *KURI
190 IF X0<2.5 THEN GOTO 200 ELSE END
200 X1=X0:X2=X0+XR:X3=(X1+X2)/2
210 X=X1 :GOSUB *FXG
220 FX1=FXG
230 X=X2 :GOSUB *FXG
240 FX2=FXG
250 X=X3 :GOSUB *FXG
260 FX3=FXG
270 IF SGN(FX1)+SGN(FX2)+SGN(FX3)=3 THEN GOTO *KURI1
280 IF SGN(FX1)+SGN(FX2)+SGN(FX3)=-3 THEN GOTO *KURI1
290 REM*****
300 REM*****
310 REM *****2J1 KINNJI KANNSUU NI TAISITE*****
320 REM*****
330 REM*****
340 GOSUB *NIJIK
350 X=X1:GOSUB *FX:FX1=FX
360 X=X2:GOSUB *FX:FX2=FX
370 X=-1*B/2/A
380 IF X1>X THEN X3=(X1+X2)/2
390 IF X2<X THEN X3=(X1+X2)/2
400 GOSUB *FX :FX3=FX
410 IF SGN(FX1)+SGN(FX2)+SGN(FX3)=3 THEN GOTO *KURI1
420 IF SGN(FX1)+SGN(FX2)+SGN(FX3)=-3 THEN GOTO *KURI1
430 REM PRINT FX1,FX2,FX3,X1,X2,X3
440 REM ***2J1 KINNJISIKI NI TAISITE HUGOU NO KAKUNI *****
450 REM *****
460 REM *****
470 IF SGN(FX1) = SGN(FX2) THEN GOTO *NXT1 ELSE GOTO *KEISN
480 *NXT1
490 IF SGN(FX1) = SGN(FX3) THEN GOTO *NXT2 ELSE GOTO *KEISN
500 REM *****
510 REM FX TO FDDX NO SEKI GA SEI NO TOKI KEISANN *****
520 REM *****
530 *KEISN
540 REM PRINT FX1,FX2,FX3
550 X=X1 :GOSUB *FDX :FDX1=FDX :X=X2 :GOSUB *FDX :FDX2=FDX
560 X=X1 :GOSUB *FDDX :FDDX1=FDDX :X=X2 :GOSUB *FDDX :FDDX2=FDDX
570 IF SGN(FX1+FDDX1) = 1 THEN GOTO *NYUTO1 ELSE GOTO *NYUTO2
580 REM *****NYUUTONN HOU JIKOU*****
590 REM *****
600 *NYUTO1
610 X=X1:FX=FX1:FDX=FDX1
620 GOSUB *NYUTON
630 LPRINT "X1=";X,"FX1+FDDX1/FDX1^2=";FX1+FDDX1/FDX1^2,"X1=";X1,"X2=";X2,"N1"
640 *NYUTO2
650 IF SGN(FX2+FDDX2) = 1 THEN GOTO *JUN1 ELSE GOTO *NXT2
660 REM *****
670 REM *****
680 *JUN1
690 X=X2:FX=FX2:FDX=FDX2
700 GOSUB *NYUTON
710 LPRINT "X2=";X,"FX2+FDDX2/FDX2^2=";FX2+FDDX2/FDX2^2,"X1=";X1,"X2=";X2,"N2"
720 GOTO *KURI1
730 *NXT2
740 REM PRINT " KAIHA SONNZAI SIMASENN";X0
750 REM PRINT FX1,FX2,FX3,"X1=";X1,"X2=";X2,FDDX1,FDDX2

```

```

760 GOTO *KURI1
770 REM *FX NO KEISANN*****
780 *FX
790 FX=A*X^2+B*X+C
800 RETURN
810 REM *****FDX NO KEISANN*****
820 *FDX
830 FDX=2*A*X+B
840 RETURN
850 REM *****FDDX NO KEISANN*****
860 *FDDX
870 FDDX=2*A
880 RETURN
890 REM *****NYUTON METHOD JIKOU*****
900 *NYUTON
910 FOR I=1 TO 10
920 XN=X-FX/FDX
930 X=XN : GOSUB *FX : FX=FX
940 X=XN : GOSUB *FDX : FDX=FDX
950 X=XN
960 NEXT I
970 RETURN
980 REM *****NIJI KINNI NO SIKINO KEISUU WO MOTOMERU*****
990 *NIJIK
1000 A=(FX1-FX2)/(X1-X2)/(X1-X3)-(FX2-FX3)/(X1-X3)/(X2-X3)
1010 B=-A*(X1+X2)+(FX1-FX2)/(X1-X2)
1020 C=FX1-A*X1^2-B*X1
1030 RETURN
1040 *FXG
1050 FXG=X^5-3.15*X^4+2.44*X^3-.2685*X^2-.0245*X+.003
1060 RETURN
1070 *KURI1
1080 X0=X0+XR
1090 GOTO *KURI

```

NYUTONN HOU NO SHOKITI NO SETTEI HOU

```

F(X)=(X+0.1)*(X-0.1)*(X-0.15)*(X-1.0)*(X-2.0) NO SHOKITI NO KETTEI
KA1***X*****FX*FDDX*****KUKANN*****
X1=-.0992788 FX1*FDDX1/FDX1^2=.333192 X1=-.14 X2=-.0400001 N1
X1=.0980737 FX1*FDDX1/FDX1^2=.422286 X1=.0599999 X2=.16 N1
X2=.147633 FX2*FDDX2/FDX2^2=.277511 X1=.0599999 X2=.16 N2
X2=1 FX2*FDDX2/FDX2^2=.186726 X1=.96 X2=1.06 N2
X2=2.00006 FX2*FDDX2/FDX2^2=.209503 X1=1.96 X2=2.06 N2

```

表2 評価プログラム

Table 2. Estimation Program

```

100 REM *****PROGURAMU .2I ***HYOUKA*****
110 INPUT N : DIM X(N) : DIM HYOUKA(N)
120 REM *****DATA NO NYUURYOKU*****
130 FOR I=1 TO N
140 READ X(I):X=X(I)
150 REM *****
160 REM *****FX NO HYOUKA*****
170 REM *****
180 REM HYOUKA NO GENNKANSUU *****
190 FX=X(I)^5-3.15*X(I)^4+2.44*X(I)^3-.2685*X(I)^2-.0245*X(I)+.003
200 FDX=5*X(I)^4-12.6*X(I)^3+7.32*X(I)^2-.537*X(I)-.0245
210 FDDX=20*X(I)^3-37.8*X(I)^2+14.64*X(I)-.537
220 REM *****
230 HYOUKA(I)=FX*FDDX/FDX/FDX
240 PRINT HYOUKA(I)
250 NEXT I
260 REM *****HYOUKA NO KEKKA*****
270 LPRINT "HYOUKA NO KEKKA *****"
280 FOR J=1 TO N
290 LPRINT "X(";J;")=":X(J):"F*FDDX/FDX^2 = ":HYOUKA(J)
300 NEXT J
310 DATA -.0992788,.0980737,.147633,1.00,2.00006

```

```

HYOUKA NO KEKKA *****
X( 1 )=-.0992788 F*FDDX/FDX^2 = -.0152172
X( 2 )=.0980737 F*FDDX/FDX^2 = .0569659
X( 3 )=.147633 F*FDDX/FDX^2 = -.123127
X( 4 )= 1 F*FDDX/FDX^2 = 1.96923E-07
X( 5 )= 2.00006 F*FDDX/FDX^2 = 3.03343E-04

```

表 3

```

100 PRINT "NYUUTONNHOU NO JIKKOU"
110 REM PROGURAMU MEI NYUUI
120 INPUT "X0=",X0
130 REM NYUUTONNHOU NO JIKKOU
140 DEF FNFX=X^5-3.15*X^4+2.44*X^3-.2685*X^2-.0245*X+.003
150 DEF FNFDX=5*X^4-12.6*X^3+7.32*X^2-.537*X-.0245
160 FOR I=1 TO 15
170 X=X0
180 XNP1=X0-FNFX/FNFDX
190 PRINT "X0      XNP1      "X0,XNP1
200 X0=XNP1
210 NEXT I

```

(1)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	-.0992788	-.100005
X0	XNP1	-.100005	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1

(2)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	.0980737	.099943
X0	XNP1	.099943	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1
X0	XNP1	.1	.1

(3)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	.147633	.150138
X0	XNP1	.150138	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15
X0	XNP1	.15	.15

(4)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	-.0332955	-1.77514
X0	XNP1	-1.77514	-1.33557
X0	XNP1	-1.33557	-.991575
X0	XNP1	-.991575	-.724914
X0	XNP1	-.724914	-.520923
X0	XNP1	-.520923	-.367804
X0	XNP1	-.367804	-.256152
X0	XNP1	-.256152	-.178712
X0	XNP1	-.178712	-.130267
X0	XNP1	-.130267	-.106629
X0	XNP1	-.106629	-.100417
X0	XNP1	-.100417	-.100002
X0	XNP1	-.100002	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1

(5)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	.716705	-2.60106
X0	XNP1	-2.60106	-1.98703
X0	XNP1	-1.98703	-1.50221
X0	XNP1	-1.50221	-1.12165
X0	XNP1	-1.12165	-.825395
X0	XNP1	-.825395	-.597405
X0	XNP1	-.597405	-.424792
X0	XNP1	-.424792	-.297216
X0	XNP1	-.297216	-.206557
X0	XNP1	-.206557	-.146796
X0	XNP1	-.146796	-.113605
X0	XNP1	-.113605	-.101607
X0	XNP1	-.101607	-.100026
X0	XNP1	-.100026	-.1
X0	XNP1	-.1	-.1

(6)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	.766705	1.98322
X0	XNP1	1.98322	2.00076
X0	XNP1	2.00076	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2

(7)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	1.67	-1.43512
X0	XNP1	-1.43512	-1.06923
X0	XNP1	-1.06923	-0.784836
X0	XNP1	-0.784836	-0.566468
X0	XNP1	-0.566468	-0.401668
X0	XNP1	-0.401668	-0.280467
X0	XNP1	-0.280467	-0.195085
X0	XNP1	-0.195085	-0.139824
X0	XNP1	-0.139824	-0.110477
X0	XNP1	-0.110477	-0.10099
X0	XNP1	-0.10099	-0.10001
X0	XNP1	-0.10001	-0.1
X0	XNP1	-0.1	-0.1
X0	XNP1	-0.1	-0.1
X0	XNP1	-0.1	-0.1

(8)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	1.7167	4.77239
X0	XNP1	4.77239	3.97961
X0	XNP1	3.97961	3.35646
X0	XNP1	3.35646	2.87333
X0	XNP1	2.87333	2.50876
X0	XNP1	2.50876	2.24907
X0	XNP1	2.24907	2.08734
X0	XNP1	2.08734	2.01511
X0	XNP1	2.01511	2.00055
X0	XNP1	2.00055	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2

(9)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	1.68	-3.47745
X0	XNP1	-3.47745	-2.68202
X0	XNP1	-2.68202	-2.05112
X0	XNP1	-2.05112	-1.55269
X0	XNP1	-1.55269	-1.16114
X0	XNP1	-1.16114	-0.855993
X0	XNP1	-0.855993	-0.620797
X0	XNP1	-0.620797	-0.442334
X0	XNP1	-0.442334	-0.309989
X0	XNP1	-0.309989	-0.215395
X0	XNP1	-0.215395	-0.152293
X0	XNP1	-0.152293	-0.116227
X0	XNP1	-0.116227	-0.102217
X0	XNP1	-0.102217	-0.100049
X0	XNP1	-0.100049	-0.1

(10)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	1.69	-14.8643
X0	XNP1	-14.8643	-11.773
X0	XNP1	-11.773	-9.30181
X0	XNP1	-9.30181	-7.32704
X0	XNP1	-7.32704	-5.74991
X0	XNP1	-5.74991	-4.49144
X0	XNP1	-4.49144	-3.48854
X0	XNP1	-3.48854	-2.69084
X0	XNP1	-2.69084	-2.0581
X0	XNP1	-2.0581	-1.55819
X0	XNP1	-1.55819	-1.16545
X0	XNP1	-1.16545	-0.859331
X0	XNP1	-0.859331	-0.623351
X0	XNP1	-0.623351	-0.444252
X0	XNP1	-0.444252	-0.311389

(11)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	.73	-39.0304
X0	XNP1	-39.0304	-31.1013
X0	XNP1	-31.1013	-24.7588
X0	XNP1	-24.7588	-19.6858
X0	XNP1	-19.6858	-15.6285
X0	XNP1	-15.6285	-12.384
X0	XNP1	-12.384	-9.79018
X0	XNP1	-9.79018	-7.71722
X0	XNP1	-7.71722	-6.06142
X0	XNP1	-6.06142	-4.7399
X0	XNP1	-4.7399	-3.68641
X0	XNP1	-3.68641	-2.84807
X0	XNP1	-2.84807	-2.18264
X0	XNP1	-2.18264	-1.65639
X0	XNP1	-1.65639	-1.24238

(12)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	.74	5.95064
X0	XNP1	5.95064	4.91298
X0	XNP1	4.91298	4.09065
X0	XNP1	4.09065	3.44334
X0	XNP1	3.44334	2.94009
X0	XNP1	2.94009	2.55821
X0	XNP1	2.55821	2.28283
X0	XNP1	2.28283	2.10621
X0	XNP1	2.10621	2.02134
X0	XNP1	2.02134	2.00108
X0	XNP1	2.00108	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2
X0	XNP1	2	2

(13)

NYUUTONNHOU NO JIKKOU			
X0	XNP1	.723	-5.08388
X0	XNP1	-5.08388	-3.96047
X0	XNP1	-3.96047	-3.06598
X0	XNP1	-3.06598	-2.3554
X0	XNP1	-2.3554	-1.79279
X0	XNP1	-1.79279	-1.34943
X0	XNP1	-1.34943	-1.00238
X0	XNP1	-1.00238	-0.733238
X0	XNP1	-0.733238	-0.527237
X0	XNP1	-0.527237	-0.372485
X0	XNP1	-0.372485	-0.259496
X0	XNP1	-0.259496	-0.180942
X0	XNP1	-0.180942	-0.131537
X0	XNP1	-0.131537	-0.107107
X0	XNP1	-0.107107	-0.100476

5. おわりに

区間内に最大2個根が含まれる時、区間を2次近似する事により、ニュートン法を適用するための初期値の設定法を示した。従来から初期値によって解が求められない場合があると言われてきたが区間を二次近似する事、およびニュートン法の収束条件を取り入れた結果、ニュートン法の反復回数を減少させる事、および発散を防止するための初期値を設定する事ができるという事を示した。5次方程式に対して実際にシミュレーションを行ない、その有効性を示した。さらに、平方根を求める時には初期値の与え方が非常に簡単となると共に収束領域が非常に広いという事も3.で示した。今後、区間内に3個以上の解が存在する場合について検討を行なっていきたい。

6. 謝 辞

本研究にあたり、御指導いただいた茨城大学岡本茂教授並びに千葉大学美多勉教授に感謝いたします。

7. 参考文献

- (1) 三浦功／田尾陽一 共訳：計算機のための数値計算法概論，P 66～P 67，サイエンス社，1972年
- (2) 有本卓著：数値解析(1)，P 62～P 63，コロナ社，昭和59年
- (3) 小島紀男 他著：マトリクスとシステム，P 113，東海大学出版会，1990年
- (4) 出井茂他著：統計・数値解析，P 186～P 187，培風館，昭和51年
- (5) 五十嵐正夫・永坂秀子：Newton Raphson 系解法の収束次数と反復回数の関係，情報処理学会論文誌，Vol. 32，No.11，P 1349～P 1354，1991年
- (6) 美多勉他著：システム制御理論入門，P 60，実数出版，1979年
- (7) 戸川隼人著：数値計算法，P 76，コロナ社，平成元年
- (8) 戸川隼人著：計算機のための誤差解析の基礎，P 55，サイエンス社，昭和51年

ABSTRACT

A Method of Setting Initial Values for the Newton—Raphson Method

Isao TAGUCHI

The initial value of Newton—Raphson method has been used the bisection method.

In the present paper, the initial value of Newton—Raphson method itself. And new method are decided by second approximation of the original function and the result of the convergence condition in (2) (Arimoto). What is more important is divergence of the root. I have discussed that the divergence of the root can be avoided by using function of second approximation in the small distance. Furthermore, verified the useful effect this paper's result by using personal computer.