実根を持つ多項式の係数入力誤差による根の誤差を改善するための多項式係数計算法

田　口　　　功

要約

本論文では，多項式の根の誤差と係数入力誤差に関してHorner法[7)]平野[8)]の方法[3)]を応用し，根の誤差を減少させるための多項式の係数計算法を改善することが目的である。

文献[2)]における多項式の入力係数の変動とそれによって生じる根の誤差の関係式を応用し，実際にコンピュータに入力された係数誤差と根の誤差の関係から，入力係数誤差によって生じる個々の根の誤差を改善するための理論的，実際的な係数計算方法を提案する。ここでは，任意の根に対して原点付近への平行移動を，組み立て除法を用い，係数計算前に対して，係数計算時全入力係数誤差を減少すれば，求められる根の誤差は少なくなることを理論的に示した。

ここでは根は実数で単根，重根を持つ場合の改善を扱い，単精度で根を計算する場合，すべての係数入力誤差を減少させれば改善が行なわれることを示した。

本方法による係数移動計算で求めた倍精度係数を単精度に丸めた係数を使用することで，種々の多項式の根を求める計算法に対して，ニュートン法，Birge-Vieta法，両方法で計算を行なった結果，単精度の根の誤差は非常に改善された。

1. はじめに

多項式の根を計算機を用いて計算する時，誤差の改善をする方法としてHornerの方法[7),8)]，平野の方法[3)]などがよく知られている。これらの方法は，共に一度求められた根を使用し，その近傍でテーラー展開し，その一次近似関数から，解の精度を向上させている根を求める計算法である。一次近似しなかったら改善されるのであろうか？両方法は，与えられた多項式の近似根に対してテーラー展開を行なって一次近似式を作り精度の改善を行なっているが，一次近似式を用いないならば平行移動による変数変換によって，精度は変化しないことになることを考察した。本稿では一般的にこのことについて述べると共に，組み立て除法が根の平行移動係数計算を満足する方法であることも述べた。

さらに，係数計算の際に，巨大な係数が現れるために，根の逆数を計算したり，定数倍変換などの変数変換[7),8)]を行なって係数入力誤差に対する根の誤差をカバーしているが，これらの操作は，係数入力誤差の変数変換を行ない，一次近似式を用いた結果，係数入力誤差が改善され根の精度が改善される結果となっていると考えられる。

本稿では，一次近似を行なわないで，より簡単に再計算し根の精度を向上させるための多項式係数を求める方法を考察した。もちろんHorner法を使用するときにも，簡単な本係数計算法で求めた係数の一次近似式は精度改善に役に立つものと考えられる。

多項式の根を求める方法には，ニュートン法，Birge-Vieta法などが考えられるが，最後にニュートン法に本方法を適用し，本係数計算法の有用性を例題で示した。

本方法の概要を以下に示す。

(1) 多項式の係数入力誤差と根の誤差の関係を一次近似することにより求め，一次近似式から根の誤差を係数入力誤差に影響させないようにするた

めには，一度求められた根に対して，原点付近への平行移動が有効であると言われているが，実際にそれを実行するためには，組み立て除法を利用しただけでは係数入力誤差が変化しないために精度は変化しないことを理論的に示した。

(2) 平行移動後に求められた係数を使用し，一次近似しないで精度を向上するための多項式係数の平行移動計算では，組み立て除法が理論式を満足することを示し，精度を向上させるためには組み立て除法を使用する際に全係数入力誤差を移動前に比較して減少させれば根の誤差は必ず減少することを示した。換言すれば，単精度の根の計算をする場合には，単精度係数を用いて一度求められた根に対し，例えば倍精度（4倍精度，…）平行移動計算を行なって原点への平行移動係数計算を行ない，その結果求められた係数値の小さな，係数入力誤差の減少した係数を用い，任意の反復計算をすれば，根の誤差は減少する。もちろん，二度目の計算においては，原点付近の小さな根を計算することになる。

(3) 実際に単精度で多項式の根を求める場合に，倍精度の係数入力を行ない倍精度の平行移動計算（誤差を含む一度求められた値を原点方向に平行移動）を行なうことにより，根の誤差を減少できる多項式係数が求められる。

(4) ニュートン法を用いて多項式の根を計算する時，本方法が有効になることを例題で示した。本方法の使用で，従来からBirge-Vieta法の欠点[1]となっていた累積誤差を少なくすることが出来た。

(5) 従来から“多項式の零点を一つずつ減次操作によって求めていくときには，絶対値の小さいものから順に求めていくべきである”と言われている[3)7)]計算に対して，一つの注意を与えるものと考えられる（係数入力誤差が誤差の大部分を占めると考えた場合には，誤差は，根の大きさと係数入力誤差および$f'(x_0)$の大きさが関係し，根の大きさだけでは判断できない結果となり，3要素の大きさが関係するものと考えられ，これはBirge-

Vieta法の減次操作をする際に利用出来る)。これは，多項式の根を求め減次操作を行なう時，根を計算するための順序を誤差の少ない根から計算する一つの目安を与えるものと考えられる（根の大きさのみでは判断できない)。

(6) 本方法は，計算機を使用して多項式の根の精度をアップしたい場合（多倍長計算にも応用出来る）の最も簡単で基本的な多項式係数の誤差の影響を根に影響させない係数計算処理法の一つになると考えられる。

(7) ただし，本稿では一度目の数値計算においての計算結果が実数で単根かm重根を含む多項式に対する改善を扱った。

2. 多項式の係数入力誤差に対する根の誤差改善

2.1 多項式の係数入力誤差と根の誤差について

一般に多項式の根を計算機を用いて求める場合，入力データは誤差を含む。本稿においては問題を扱いやすくするために，相異なる実根を持つ場合の多項式の構造（多項式の係数，多項式の微分関数の値，多項式の根自身の大きさ）によって生じる誤差を少なくするための検討を行なった。

最初に，多項式の係数の変化が根に与える影響について考える。多項式

$$f(x)=x^n+a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1 \tag{2-1}$$

の各係数がわずかに変化した多項式を

$$\bar{f}(x)=x^n+\bar{a}_nx^{n-1}+\bar{a}_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\bar{a}_2x+\bar{a}_1 \tag{2-2}$$

とする。$f(x)$の任意の根をξ，これに対応する$\bar{f}(x)$の根を$\bar{\xi}$とする。ここで，$\bar{a}_{n+1}=a_{n+1}=1$とし，$\Delta a_{n+1}=0$とする。

$$\Delta a_{k+1}=\bar{a}_{k+1}-a_{k+1} \tag{2-3}$$

$$\Delta\xi=\bar{\xi}-\xi \tag{2-4}$$

とおく$(k=0\sim n)$。仮定から，

$$\bar{f}(\bar{\xi})=0$$

$$=\bar{f}(\overline{\xi})-f(\xi)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\{(a_{k+1}+\Delta a_{k+1})(\xi+\Delta\xi)^{k}-a_{k+1}\xi^{k}\}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\{a_{k+1}(\xi+\Delta\xi)^{k}+\Delta a_{k+1}(\xi+\Delta\xi)^{k}-a_{k+1}\xi^{k}\}$$
$$=f(\xi+\Delta\xi)-f(\xi)+\sum_{k=0}^{n}\Delta a^{k+1}\overline{\xi}^{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(\xi)\Delta\xi^{k}/k!+\sum_{k=0}^{n}\Delta a^{k+1}\overline{\xi}^{k} \qquad (2-5)$$

となる。（２－５）式から微分項の１次近似をとると，

$$\begin{aligned}f'(\xi)\Delta\xi &=-\Delta a_{n}(\xi+\Delta\xi)^{n-1}\\ &\quad-\Delta a_{n-1}(\xi+\Delta\xi)^{n-2}-\cdots\\ &\quad-\Delta a_{2}(\xi+\Delta\xi)-\Delta a_{1}\\ &=-\Delta a_{n}\{\xi(1+\Delta\xi/\xi)\}^{n-1}\\ &\quad-\Delta a_{n-1}\{\xi(1+\Delta\xi/\xi)\}^{n-2}-\cdots\\ &\quad-\Delta a_{2}\{\xi(1+\Delta\xi/\xi)\}-\Delta a_{1}\end{aligned} \qquad (2-6)$$

ここで，$(1+\delta)^{m}=1+m\delta$ の関係を代入する$(\delta\ll 1)$。

さらに（２－６）式を展開すると，

$$\begin{aligned}f'(\xi)\Delta\xi &=-\Delta a_{n}\xi^{n-1}-\Delta a_{n-1}\xi^{n-2}-\cdots-\Delta a_{2}\xi\\ &\quad-\Delta a_{1}-\Delta a_{n}\xi^{n-1}(n-1)(\Delta\xi/\xi)\\ &\quad-\Delta a_{n-1}\xi^{n-2}(n-2)(\Delta\xi/\xi)-\cdots\\ &\quad-\Delta a_{2}\xi(\Delta\xi/\xi)-\Delta a_{1}\end{aligned} \qquad (2-7)$$

となる。ここで，各ξに対して，$\Delta\xi$が非常に小さいと$(\xi\gg\Delta\xi)$仮定すれば，

$$\begin{aligned}f'(\xi)\Delta\xi &=-\Delta a_{n}\xi^{n-1}-\Delta a_{n-1}\xi\, n-2-\cdots-\Delta a_{2}\xi\\ &\quad-\Delta a_{1}\end{aligned} \qquad (2-8)$$

であるから，近似的に，

$$\begin{aligned}\Delta\xi &=(-\Delta a_{n}\xi^{n-1}-\Delta a_{n-1}\xi^{n-2}-\cdots-\Delta a_{2}\xi\\ &\quad-\Delta a_{1})/f'(\xi)\end{aligned} \qquad (2-9)$$

となる。ここで次のことがわかる。

(1)　計算機に多項式の係数を入力した場合，その誤差によって生じる根の

誤差は近似的には各係数の入力誤差（多項式の係数が小さければ入力誤差も小さくなる），根自身の大きさ（根自身の値が小さければ根の誤差も小さくなる），$f'(\xi)$の３要素によって決定される。従って，係数入力時にすでに入力された係数を使用して種々の反復数値計算を実行しても，それらの方法における誤差は入力時に決定されてしまう。

(2)　任意の根ξに対して，（１）で述べた誤差を減少するためには，Δa_n, Δa_{n-1}, …, Δa_2, Δa_1の値がすべて０に近づくこと，およびξが０に近いことが$f'(\xi)$の値が変化しない場合その条件となることは（２－９）式から明かである。

2.2　任意の根ξに対して全根を原点方向にr平行移動することによる根の誤差改善のための条件式

（２－９）式を求めた同様な方法によって，全根をrだけ平行移動した場合の係数入力誤差に対する根の誤差について考える。

ここで，（２－１）式に対して，$x=y+r$で変数変換した

$$f_r(y)\equiv f(y+r) \tag{2-10}$$

について$y=r$でテーラー展開することを考える。

$$f_r(y)=y^n+b_n y^{n-1}+b_{n-1}y^{n-2}+\ \cdots\ +b_2 y+b_1 \tag{2-11}$$

とし，

$$\zeta=\xi-r \tag{2-12}$$

の誤差$\Delta\zeta$を評価することを考える。（２－11）式に対して，前項と同様な議論から，テーラー展開後の一次近似誤差$\Delta\zeta$は，

$$\Delta\zeta=(-\Delta b_n\zeta^{n-1}-\Delta b_{n-1}\zeta^{n-2}-\ \cdots\ -\Delta b_2\zeta-\Delta b_1)/f'(\zeta) \tag{2-13}$$

の関係となる。（２－13）式は，（２－12）式の関係および（２－５）式，（２－９）式，（２－10）式の関係を用いると，

$$\Delta\zeta=\{-\Delta a_n(\zeta+r+\Delta\xi)^{n-1}-\Delta a_{n-1}(\zeta+r+\Delta\xi)^{n-2}-\ \cdots\ -\Delta a_2(\zeta+r+\Delta\xi)-\Delta a_1\}/f'(\zeta)$$

$$= [-\Delta a_n \{(\zeta+r)(1+\Delta\xi/(\zeta+r))\}^{n-1}$$
$$-\Delta a_{n-1} \{(\zeta+r)(1+\Delta\xi/(\zeta+r))\}^{n-2}- \cdots$$
$$-\Delta a_2 \{(\zeta+r)(1+\Delta\xi/(\zeta+r))\} -\Delta a_1]/[f'(\zeta)] \qquad (2-14)$$

となり，$1 \gg \Delta\xi/(\zeta+r)$の関係を用いると，近似的に

$$\Delta\zeta \fallingdotseq [-\Delta a_n(\zeta+r)^{n-1}-\Delta a_{n-1}(\zeta+r)^{n-2}- \cdots$$
$$-\Delta a_2(\zeta+r)-\Delta a_1]/[f'(\zeta)] \qquad (2-15)$$

となる，従って，ここで一度求められた根を$r=\xi$，$\zeta \fallingdotseq 0$とすると，

$$\Delta\zeta=\Delta\xi \qquad (2-16)$$

の関係が求められる，理論的には，（２－９）式と（２－15）式の値は等しくなるので平行移動操作だけでは係数入力誤差に対する根の誤差は変化しないことになる。ここで，多項式の微分関数値は，根の差積によって表わせるから一般的に

$$f'(\zeta)=f'(\xi) \qquad (2-17)$$

の関係が成立することに注意する。従って，次のことが言える。

(1)　平行移動によって（２－17）式の関係を考慮し，$\Delta\zeta<\Delta\xi$の関係を満足するためには，最初に根を計算した多項式の入力係数誤差Δa_n，Δa_{n-1}，…，Δa_2，Δa_1に対して，平行移動後の係数$\Delta a_n'$，$\Delta a_{n-1}'$ …，$\Delta a_2'$，$\Delta a_1'$との間に

$$\Delta a_n > \Delta a_n' = k\Delta a_n$$
$$\Delta a_{n-1} > \Delta a_{n-1}' = k\Delta a_{n-1}$$
$$\cdots,$$
$$\Delta a_2 > \Delta a_2' = k\Delta a_2$$
$$\Delta a_1 > \Delta a_1' = k\Delta a_1 \qquad (2-18)$$

の関係を満足する$k<1$が存在することが必要となる。逆に（２－18）式の関係を満足する$k<1$が存在すれば，

$$\Delta\zeta<k\Delta\xi \qquad (2-19)$$

の関係が成立し誤差は減少する。

ところで，一度求められた根ξと多項式の入力係数を用いて（2－15）式の理論式を実現するための係数再計算法が必要となるがこれは後で述べる（組み立て除法がこの関係を満足する）こととする。

(2) また，ここで注意することは，本係数計算法は根の精度を向上させるためのHorner法のように，再計算された係数の一次近似式は使用しないで全係数を用い，いろいろな計算法で，再計算するための係数を求めることである。

(3) 実際問題として（1）を実行するために，単精度の根の計算をする場合には，一度求められた根に対し，例えば倍精度（4倍精度，…）計算を行なって原点への平行移動係数計算を行ない（すべての係数の入力誤差は同じ割合で減少する），その結果求められた係数入力誤差の小さな係数を用い，根を計算することになる。一度目に求められた根を覚えておき，二度目の係数計算を行ない反復計算を行なうことで，入力係数誤差に対する，誤差の影響は改善されることになる。

2.3 多項式が重根の場合の入力係数の誤差改善

（2－5）式，（2－8）式からm重根を持つ多項式に対しては，

$f'(\xi)=0,\ f^{(2)}(\xi)=0,\ \cdots,\ f^{(m-1)}(\xi)=0$に注意すると，

$$f^{(m)}(\xi)(\Delta\xi)^m/m! = -\Delta a_n\xi^{n-1}-\Delta a_{n-1}\xi^{n-2}-\cdots$$
$$-\Delta a_2\xi-\Delta a_1 \qquad (2-20)$$

となる。さらに（2－15）式を用いて，$\Delta\xi$を計算すると，

$$\Delta\xi=[\ \{m!\}\ \ \{-\Delta a_n\xi^{n-1}-\Delta a_{n-1}\xi^{n-2}-\cdots$$
$$-\Delta a_2\xi-\Delta a_1\}\ /\ \{f^{(m)}(\xi)\}\ ]^{1/m} \qquad (2-21)$$

となる。ここで（2－21）式に対して，任意の根に対して，$f^{(m)}(\xi)$の値は，平行移動によって変化しないことを示す。$f(\xi)$がα_1のm重根を持つとすれば，（2－22）式が成り立つ。

$$f(\xi)=(\xi-\alpha_1)^m \qquad (2-22)$$

（2－22）式の微分を行なうと

$$f'(\xi)=m(\xi-\alpha_1)^{m-1} \tag{2-23}$$

$$f^{(2)}(\xi)=m(m-1)(\xi-\alpha_1)^{m-2} \tag{2-24}$$

$$f^{(3)}(\xi)=m(m-1)(m-2)(\xi-\alpha_1)^{m-3} \tag{2-25}$$

となるので，$f'(\alpha_1)=0$, $f^{(2)}(\alpha_1)=0$, $\cdots$, $f^{(m-1)}(\alpha_1)=0$の関係が成立し，

$$\begin{aligned} f^{(m)}(\alpha_1)&=m(m-1)(m-2)(\xi-\alpha_1)^{m-m} \\ &=m(m-1)(m-2) \end{aligned} \tag{2-26}$$

となるから$f^{(m)}(\xi)\neq 0$の値は平行移動により変化しない。さらに，（2－15）式に対して，全根の平行移動（平行移動量をrとする）を考えると，（2－15）式と同様に

$$\begin{aligned} \Delta\zeta=[\ \{m!\}\ \ &\{-\Delta a_n(\zeta+r)^{n-1}-\Delta a_{n-1} \\ &(\zeta+r)^{n-2}-\ \cdots\ -\Delta a_2(\zeta+r)-\Delta a_1\}\ / \\ &\{f^{(m)}(\zeta)\}\ ]^{1/m} \end{aligned} \tag{2-22}$$

が成立する。従って，2.2で述べた（1），（2），（3）の関係は，m重根を持つ多項式に対しても同様に成立する。また重根および重根を含む場合の詳しい証明は文献[9]を参照されたい。

3. 係数入力誤差による根の誤差改善を実行するための組み立て除法

理論的に一度求められた根ξに対して全根の平行移動を行なった場合，2．においてただ単に原点方向へ移動しても係数入力誤差が減少しなければ根の誤差は全く減少しないことを述べた。組み立て除法を用いた場合この関係が満足されることを述べる。これは，重要な結果であると考えられる。実際に，本方法で求められた係数を用い，ニュートン法に適用した場合，理論通りの結果となり誤差は全く改善されなかった（例題2，表5，表6）。

ここでは，組み立て除法は（２－15）式の関係を満足することと，（２－15）式に対する改善条件式（（２－18）式，（２－19）式）を満足するための簡単な方法として，根を単精度で求め改善する場合には，倍精度の係数移動計算をしなければならないということについて述べる（移動前に対し，移動操作において全ての多項式係数の入力誤差が減少すれば根の誤差は改善される)。

ここでは，簡単化のための２次の多項式について，全根の平行移動について述べることとする。

$$f(x)=x^2+a_2x+a_1 \tag{3-1}$$

に対して，全根を$-r(r>0)$だけ原点方向に平行移動すると，平行移動後の係数を計算する組み立て除法は，次のようになる。

1	a_2	a_1	r
	r	$r(a_2+r)$	
1	a_2+r	$a_1+a_2\cdot r+r^2$	
	r		
1	a_2+2r		

従って，平行移動後の多項式を$f_1(\zeta)$とすると，

$$f_1(\zeta)=\zeta^2+(a_2+2r)\zeta+(a_1+a_2\cdot r+r^2)$$
$$=0 \tag{3-1}$$

となる。従って，根の平行移動をするために組み立て除法は使用できる。[8)]

Horner法[8)]は，（３－１）式に対して$\zeta^2 \fallingdotseq 0$と近似して

$$\zeta=-(a_2+2r)/(a_1+a_2\cdot r+r^2) \tag{3-2}$$

とし根を$r+\zeta$とする方法でこの操作を繰り返し根の精度を改善する方法[8)]である。これに対して本方法は，$\zeta^2 \fallingdotseq 0$の関係を使用しないで根の精度を向上させるための係数を計算する。そのために（３－１）式がｎ次元多項式であれば一般的にはｎ個の係数改善をしなければならない。再計算の時

には，最初に用いた多項式の根を求める方法（ニュートン法，Birge-Vieta法，Horner法にも利用できる）で精度は向上する。そのための係数計算改善法である。

（3－1）式に対して$\Delta\zeta$は，

$$\Delta\zeta=-[\Delta\{a_2+2r\}\zeta+\Delta\{a_1+a_2\cdot r+r^2\}]/[2\zeta+\{a_2+2r\}] \quad (3-3)$$

となる，ここで，$\Delta\{a_2+2r\}$および$\Delta\{a_1+a_2\cdot r+r^2\}$は，平行移動後の多項式の係数入力誤差を表わすものとする，（3－3）式において，平行移動がない場合には，$r=0$とおくと，

$$\Delta\zeta=-[\Delta\{a_2\}\zeta+\Delta\{a_1\}]/[2\zeta+\{a_2\}] \quad (3-4)$$

となるから単精度計算でも倍精度計算でも（2－9）式を満足する。（3－4）式は，

$$\Delta\xi=-[\Delta\{a_2\}\xi+\Delta\{a_1\}]/[2\xi+\{a_2\}] \quad (3-5)$$

となる，また，組み立て除法は平行移動量がない場合，単精度計算をするより倍精度計算をしたほうが（3－5）式の分子を考慮すると誤差$\Delta\xi$は確実に減少する（単精度係数入力に対し，倍精度で入力された係数は，$\Delta\{a_2\}$および$\Delta\{a_1\}$が一定の割合で減少し，分母の$2\xi+\{a_2\}$は誤差が存在しても大きさは単精度も倍精度もそれほど変化しないため）。従って，平行移動がない時組み立て除法は（2－18）式の理論式を実行することが出来る。

また，単精度計算で一度根を求め，その値を平行移動量とした時の誤差を$\Delta\zeta$とする。ここで（3－2）式を使用し，$r=\xi$（一度求められている値であるからメモリーに記憶されているため係数の入力のように，入力された時点で誤差は生じなく平行移動計算中は一定値）とし，$\zeta\fallingdotseq 0$（根の原点付近への移動で二度目に計算する値は，平行移動後非常に小さな値となる）とすると，平行移動後の根の誤差$\Delta\zeta$は，近似的に

$$\Delta\zeta=-[\Delta\{a_2+2r\}\zeta+\Delta\{a_1+a_2\cdot r+r^2\}]/$$

$$[2\zeta+\{a_2+2r)] \tag{3-6}$$

となる。ここで，rは一度計算された値であるから係数入力のように誤差は生じないことに注意すると，

$$\Delta\{a_2+2r\}\zeta=\Delta\{a_2\}\zeta \tag{3-7}$$

$$\Delta\{a_1+a_2\cdot r+r^2\}=\Delta\{a_1\}+\Delta\{a_2\}r$$

$$=\Delta\{a_1\}+\Delta\{a_2\}\xi \tag{3-8}$$

となるから，（３－７）式，（３－８）式を（３－６）式に代入すると，

$$\Delta\zeta=-[\Delta\{a_2\}\zeta+\Delta\{a_1\}+\Delta\{a_2\}\xi]/$$

$$[2\zeta+\{a_2+2r\}]$$

$$=-[\Delta\{a_2\}(\zeta+\xi)+\Delta\{a_1\}]/$$

$$[2\zeta+\{a_2+2r\}] \tag{3-9}$$

となる。（３－９）式に対して$\xi\gg\zeta$，$r=\xi$の関係を用いると，

$$\Delta\zeta\fallingdotseq-[\Delta\{a_2\}\xi+\Delta\{a_1\}]/$$

$$[\{a_2+2(\xi+\zeta)]$$

$$\fallingdotseq-[\Delta\{a_2\}\xi+\Delta\{a_1\}]/$$

$$[\{a_2+2\xi]\tag{3-10}$$

となる，従って，組み立て除法を使用し，係数移動計算を同精度で行なった場合，$\Delta\xi=\Delta\zeta$となり同精度の平行移動係数計算では係数入力誤差に対する根の誤差は変化しない。逆に（３－９）式の分子の関係式

$$-[\Delta\{a_2\}\xi+\Delta\{a_1\}] \tag{3-11}$$

を考えると$\Delta\{a_2\}$および$\Delta\{a_1\}$が一定の割合で減少すれば

$$\Delta\xi>\Delta\zeta \tag{3-12}$$

の関係が成立する。ξが単精度であっても倍精度であっても一度求められているから誤差の増減はない。ここで，（３－10）式の分母の値は近似的に変化しない。これは，ξを計算するときは単精度係数入力に対し，ζを計算するとき倍精度係数入力することによって実現できる。

4. 例題

例題１　ニュートン法を用いて，$X^2-100.0012X+0.12=0$の根（真の根0.0012,100.0）を求める問題を考える。これを実行するためのBASIC言語を用いた基本的プログラムを表１に示す。ここでは，一度求められた値（X1/K）に対して，平行移動量（H2＝H）をいろいろ変化させ，二度目に求められた値（X1/K＋H2）を最終的な根とした。表２は，初期値を

表１　$X^2-100.0012X+0.12$の単根（真の根0.0012,100.0）を求めるためのニュートン法と組み立て除法によるプログラム

Table 1 Numerical computation program which uses Newton's method and the synthetic division for $f(x)=x^2-100.0012x+0.12=0$ with simple roots.

```
100 REM 平行移動，K倍移動両移動による係数入力誤差による根の誤差改
110 REM プログラム名　＊＊＊BYDOU1≒ @根２・１用プログラム********
120 DEFDBL A-H,J-L,O-W
130 K=1#
140 A2=-100.0012#:A1=.12#
150 H1=0   :H2=0#
160 LPRINT "0.0012      NO KAI WO MOTOMERU"
170 LPRINT "H=",H2,"K=",K
180 B1=A2+H2:B2=A1+B1*H2:C1=B1+H2
190 CAA2=C1*K:CAA1=B2*K*K:IAA2=CAA2:IAA1=CAA1
200 REM ニュートン法  F(X)=X^2-100.0012 X+0.12  *********
210 REM  根X1=１００・０及びX2=０．００１２********
220 INPUT "反復回数を入力せよＮ＝":N
230 REM ニュートン法実行＊＊＊＊＊
240 X1=-1
250 FOR M=1 TO N
260 X2=X1-(X1^2+IAA2*X1+IAA1)/(21*X1+IAA2)
270 LPRINT X1,X2
280 X1=X2
290 NEXT M
300 LPRINT "X1/K=";X1/K;"H2=";H2
310 LPRINT"X1/K+H2=";X1/K+H2
```

表２　平行移動量H＝0の時の結果

Table 2 Numerical results for the parallel shift quantity H＝0.

```
0.0012       NO KAI WO MOTOMERU
H=                 0            K=
-1               -.0086273
-.0086273          1.19903E-03
 1.19903E-03     .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
 .0012           .0012
X1/K= 1.200000056996942D-03 H2= 0
X1/K+H2= 1.200000056996942D-03
```

表３　平行移動量H＝1.200000056996942D-03の時の結果

Table 3 Numerical results for the parallel shift quantity H＝1.200000056996942D-03

```
0.0012       NO KAI WO MOTOMERU
H=              1.200000056996942D-03
-1             -9.80401E-03
-9.80401E-03  -9.61125E-07
-9.61125E-07  -5.69571E-11
-5.69571E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
-5.69969E-11  -5.69969E-11
X1/K=-5.699693841898501D-11 H2= 1.200000056996942D-03
X1/K+H2= 1.200000000000004D-03
```

表4　平行移動量H＝0.00119の時の結果

Table 4 Numerical results for the parallel shift quantity H＝0.0019

```
0.0012        NO KAI WO MOTOMERU
H=              .00119        K=
-1             -9.79424E-03
-9.79424E-03    9.03849E-06
 9.03849E-06    .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
 .00001         .00001
X1/K= 9.999999747378752D-06 H2= .00119
X1/K+H2= 1.199999999747379D-03
```

－1.0とし，H＝０とした場合の計算結果を示した。ここでは，15回の単精度の反復計算を行なって根を求めた。注意として，多項式の係数を倍精度で入力し，平行移動量は０とし，組み立て除法を用い，単精度係数に丸め，その係数を使用し，単精度で15回のニュートン法を実行し，その結果を倍精度表示したものである（1.200000056996942D-03）。また，表３には，表２に示した一度求められた結果（1.200000056996942D-03）を平行移動量とし，再計算した結果を初期値は－１に設定し計算したものである。その結果は，1.200000000000004D-03となり，７桁の改善が行われた。また，同様な方法で一度求められた結果に対して，0.00119の平行移動計算を行なった場合の結果を表４に示す。根は，1.199999999747379D-03となった。２桁の改善が行われた。ここで，平行移動量によって改善される

桁数が異なることがわかる。

また，多項式の入力係数を倍精度にとり，ニュートン法も倍精度で行ない，平行移動量を0.001,0.0011999として，15回の反復計算を行なった結果をそれぞれ，表５，表６に示す。表５，表６から，係数移動をニュートン法と同精度で行なうと精度の改善は全く行なわれていないことがわかる。

例題２　重根100.1を持つ$X^2-200.2X+10020.01=0$の根を初期値を10.0とし，50回の反復計算を行なって求めた。プログラムを表７に示した。表８には，H＝0の結果（100.0707473754883）を示す。ここでは，例題１と同様平行移動計算は倍精度で行ない，単精度に丸め，単精度でニュートン法

表５　組み立て除法による平行移動計算（H＝0.001）を倍精度で行ない，ニュートン法を倍精度で実行
Table 5 Newton's method and synthetic division are double precision with parallel shift quantity H＝0.001.

```
0.0012        NO KAI WO MOTOMERU
H=              .001          K=              1
-1                  -9.607920664975997D-03
-9.607920664975997D-03        1.990382234191418D-04
 1.990382234191418D-04        1.999999993893555D-04
 1.999999993893555D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
 1.999999993986057D-04        1.999999993986057D-04
X1/K= 1.999999993986057D-04 H2= .001
X1/K+H2= 1.199999999398606D-03
単精度計算による倍精度表示    1.199999999398606D-03
```

表6　組み立て除法による平行移動計算（H=0.0011999）
を倍精度で行ない，ニュートン法を倍精度で実行
Table 6 Newton's method and synthetic division are double precision with parallel shift quantity H=0.0011999.

```
0.0012       NO KAI WO MOTOMERU
H=              .0011999      K=              1
-1               -9.803939062437414D-03
-9.803939062437414D-03        -8.610155372728613D-07
-8.610155372728613D-07         9.999938937015753D-08
 9.999938937015753D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
 9.999939860576545D-08         9.999939860576545D-08
X1/K= 9.999939860576545D-08 H2= .0011999
X1/K+H2= 1.199999999398606D-03
単精度計算による倍精度表示    1.199999999398606D-03
```

を実行し，その結果を倍精度表示した。表9は，100.0の平行移動を行なった結果（100.0999711751938）であり，表10は，100.09の平行移動計算を行なった結果（100.0999981734529）である。ここで，重根を持つ多項式の根を求める場合にも平行移動を倍精度で行ない，単精度に丸め，単精度でニュートン法を実行すれば，精度の向上が行なわれることがわかる。

5. おわりに

多項式の根を求める時，ニュートン法，Birge-Vieta法，Horner法，平野

表7　$X^2-200.2X+10020.01=0$の重根（真の根，100.1）を求めるためのニュートン法と組み立て除法を用いたプログラム

Table 7 Numerical computation program which uses Newton's method and the synthetic division for $f(x)=x^2-200.2x+10020.01=0$ with multiple roots.

```
100 REM 平行移動，K倍移動両移動による係数入力誤差による根の
110 REM プログラム名　＊＊＊BYJUU1≒@根２・１用プログラム**
120 DEFDBL A-H,J-L,O-W
130 K=1#
140 A2=-200.2#:A1=10020.01#
150 H1=0    :H2=100.0999#
160 LPRINT "100.1 の 重根 を求める問題 ***"
170 LPRINT "H=",H2,"K=",K
180 B1=A2+H2:B2=A1+B1*H2:C1=B1+H2
190 CAA2=C1*K:CAA1=B2*K*K:IAA2=CAA2:IAA1=CAA1
200 REM ニュートン法 F(X)=X^2-200.2 X+10020.01 *********
210 REM 根X1=１００・１ X2=１００．１の重根問題****
220 INPUT "反復回数を入力せよN＝";N
230 REM ニュートン法実行＊＊＊＊＊
240 X1=10
250 FOR M=1 TO N
260 X2=X1-(X1^2+IAA2*X1+IAA1)/(2!*X1+IAA2)
270 LPRINT X1,X2
280 X1=X2
290 NEXT M
300 LPRINT "X1/K=";X1/K;"H2=";H2
310 LPRINT"X1/K+H2=";X1/K+H2
```

表8　平行移動量H＝0の時の結果

Table 8 Numerical results for the parallel shift quantity H＝0.

100.1の重根を求める問題

H=	0
10	55.05
55.05	77.575
77.575	88.8374
88.8374	94.4684
94.4684	97.2843
97.2843	98.6937
98.6937	99.3992
99.3992	99.7545
99.7545	99.9241
99.9241	100.041
100.041	100.016
100.016	99.9985
99.9985	100.047
100.047	100.028
100.028	100.022
100.022	100.059
100.059	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071
100.071	100.071

X1/K= 100.0707473754883 H2= 0
X1/K+H2= 100.0707473754883

表9　平行移動量H＝100.0の時の結果

Table 9 Numerical results for the parallel shift quantity H＝100.0

100.1の重根を求める問題

H=	100
10	5.05
5.05	2.575
2.575	1.3375
1.3375	.71875
.71875	.409375
.409375	.254688
.254688	.177344
.177344	.138672
.138672	.119336
.119336	.109668
.109668	.104834
.104834	.102417
.102417	.101209
.101209	.100605
.100605	.100303
.100303	.100147
.100147	.100077
.100077	.100046
.100046	.100006
.100006	.0999258
.0999258	.0999823
.0999823	.100087
.100087	.100045
.100045	.0999925
.0999925	.100117
.100117	.100041
.100041	.0999955
.0999955	.0995796
.0995796	.0997889
.0997889	.0999036
.0999036	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712
.0999712	.0999712

X1/K= .09997117519378662 H2= 100
X1/K+H2= 100.0999711751938

表10　平行移動量H＝100.09の時の結果
Table 10 Numerical results for the parallel shift quantity H＝100.09

100.1の重根を求める問題

H=	100.09
10	5.005
5.005	2.5075
2.5075	1.25875
1.25875	.634375
.634375	.322187
.322187	.166094
.166094	.0880469
.0880469	.0490235
.0490235	.0295117
.0295117	.0197559
.0197559	.0148779
.0148779	.012439
.012439	.0112195
.0112195	.0106098
.0106098	.0103049
.0103049	.0101523
.0101523	.0100762
.0100762	.0100379
.0100379	.01002
.01002	.0100096
.0100096	.0100055
.0100055	.0100035
.0100035	.0100066
.0100066	.0100028
.0100028	.0100146
.0100146	.0100089
.0100089	.0100056
.0100056	.010003
.010003	.0100017
.0100017	9.99965E-03
9.99965E-03	9.96856E-03
9.96856E-03	9.98442E-03
9.98442E-03	9.99189E-03
9.99189E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03
9.99817E-03	9.99817E-03

X1/K= 9.998173452913761D-03 H2= 100.09
X1/K+H2= 100.0999981734529

の方法などがよく用いられる。どの方法を用いても計算機には，係数が入力される。入力された係数には，誤差が含まれるのが一般的となる。わずかな係数誤差の影響で根の誤差が大きくなる場合もある。本稿では入力された係数誤差の影響を一度求められた根を利用し，根の誤差に影響しないようにするための理論的，技術的な係数計算改善法を提案した。ここでは，Horner法，平野の方法，および係数入力誤差に対する根の誤差の関係式を応用し，入力係数の誤差が多項式の根に誤差を生じなくするための係数計算の方法を考察した。最後に，本係数計算法を利用した係数を用い，ニュートン法に適用した結果良好な結果を得た。なお，本論文は情報処理学会第49回（北海道大学），第50回（青山学院大学）全国大会で口頭発表を行ない，加筆・訂正を行なったものである。

6. 謝辞

本研究にあたり，理論的問題で細かい部分にまで御指導いただいた，東京工業大学美多勉教授に感謝いたします。

参考文献

1) T. R.マッカーラ著，三浦功，田尾陽一共訳：計算機のための数値計算法概論，サイエンス社，P82－93，1972年
2) 牧乃内三郎，鳥居達生著：数値解析，オーム社，P77－83，P89－90，1988年
3) 伊理正夫著：数値計算，朝倉書店，P129－134，1981
4) 有本卓著：数値解析（1），コロナ社，p49－51，1981年
5) 田口功：誤差限界式を用いた多項式の数値計算における根の反復誤差改善法，1－131，第49回（平成6年後期）講演論文集，情報処理学会，1994年
6) 川上一郎著：数値計算，岩波書店，P14－16，1989年
7) 一松信著：数値解析，朝倉書店，P63－64，P78－79，1982年
8) 渡部信夫著：計算法，朝倉書店，P38－47，1964年
9) 田口功：誤差限界式を応用した多項式の実根および複素根を求める数値

実根を持つ多項式の係数入力誤差による根の誤差を改善するための多項式係数計算法

計算における誤差改善法，環境情報研究，第 3 号，P93, 1994 年

Improving the Calculation Method of Coefficient's of Polynomials with Coefficient Errors for Simple Real Roots

Isao Taguchi

Abstract

It is the purpose of this paper to point out how to improve the method of calculation of coefficients of the polynomial by using Horner's method[7,8] and Hirano's method[3] for many ways of the numerical computation.

The anthor calculates the equality, $\Delta \xi = (-\Delta a_n \xi^{n-1} - \Delta a_{n-1} \xi^{n-2} - \cdots - \Delta a_2 \xi - \Delta a_1)/f'(\xi) = \Delta f(\xi)/f'(\xi)$ from $\bar{f}(\bar{\xi}) - f(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \{(a_{k+1} + \Delta a_{k+1})(\xi + \Delta \xi)^k - a_{k+1} \xi^k\}$. Δa_n, Δa_{n-1}, $\cdots$, Δa_2, Δa_1 are the input errors of coefficient the n dimensional polynomial in the numerical computation. The author discusses the improvement of the individual real root by the input coefficient errors for many ways of the numerical computation.

The parallel shift is used with the synthetic division. The compution of the single precision uses the parallel shift with the synthetic division by the double precision for decreasing all input coefficient errors.

As a result of the parallel shift using how to improve the method of calculation of coefficients of the polynomial, the errors are improved in the method of the Birge-Vieta and Newton for many ways of the numerical computation.