# ハピー数について

岡本　　茂

## On The Happy Number

Sigeru OKAMOTO

ここではハピー数を一般化して論ずる。まず1以上の整数$n$を固定する。そして，任意の非負整数$x$を10進展開し，その各桁の数の$n$乗を加えたものをハピー関数$h(n, x)$の値とする。この$n$次元ハピー関数を利用して数列$\mathbf{K}(n, x) = \{h^s(n, x) \mid s = 0, 1, 2, \ldots\}$が定まる。

これを$x$に対するハピー列といい，その中に1があるとき，$x$をハピー数という。2次元の場合が参考文献にある。これを一般進法で扱うこともできるが，それについては省略した。

ハピー列は分数の小数展開に似て一種の循環性を持っており，しかも各次元のハピー列は有限個である。この有限性は有理数の小数展開と異なる。

ハピー数は各次元でそれぞれ有限個しかない。実際に4次元までのハピー数を求めるため，*Excel*を使って計算した。5次元以上でハピー数を求めることは，計算量の関係でできなかったが，それは別の時点で考えたい。これには考え方を変える必要があろう。

### 1．序　論

自然数$n$を固定し，それを使って，第2節で非負整数のハピー関数とハピー列を定め，ハピー列の循環性と循環部分の有限性を示す。第3節でそれらを証明し，第4節で具体例を示した。

ハピー列は有理数の小数展開に似ている面があるから，考え方や計算法を工夫すれば，別の展開があり得よう。ここでは基本的な面だけに絞ってまとめることとした。

### 2．ハピー関数

0と自然数から成る集合を$\mathbf{Z}_+$，自然数の集合を$\mathbf{N}$と書く。非負整数$x$と自然数$n$に対し，ハピー関数$h(n, x) : \mathbf{N} \times \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{Z}_+$を次のように定義する。

$0 \leqq x \leqq 9$のときは

$$h(n, x) = x^n$$

と定める。10以上の一般の自然数$x$に対しては，その十進展開を$x = x_p x_{p-1} \cdots x_0$として，

$$h(n,x) = h(n, x_p) + h(n, x_{p-1}) + \cdots + h(n, x_0)$$

と定める。これを$n$次元のハピー関数という。

次に，写像$h$を$s$回合成したものを$h^s$と書く。まず$h^0(n, x) = x$と定め，一般的には

$$h^s(n, x) = h(n, h^{s-1}(n, x)) \qquad s = 1, 2, \ldots.$$

と定義する。

これによって$n$と$x$を定めたとき，数列$\mathbf{K}(n, x) = \{h^s(n, x) \mid s = 0, 1, 2, \ldots\}$が定まる。この数列を$x$に対する次元$n$のハピー列と呼ぼう。ハピー列が1を含むとき，$x$をハピー数という。次の二つの定理で，ハピー列の循環性と循環部分の有限性を示す。なお，定理の証明は第3節に示す。

定理1　$\mathbf{K}(n, x)$には循環する部分がある。すなわち，最初に循環しない部分があることがあり，その後は一定の数列が循環する。これを循環列と呼ぶこととする。

定理2　循環列はその次元に対応して有限個しか存在しない。すなわち，次元を指定したとき，循環列の個数はその次元だけに対応して定まり，有限個しか存在しない。

## 3．証　明

最初に定理1を示す。それには$h^p(n, x) = h^q(n, x)$となる二つの整数$p < q$があることを示せばよい。ここでは論点を分けて補題の形にまとめた。以下では自然数$n$を固定し，$s$を非負整数とする。このとき，写像$a, b : \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{Z}_+$を

$$a(s) = 9^n s, \quad b(s) = 10^s - 1$$

と定める。したがって，$a(s) = h(n, b(s))$となる。

$a(s)$，$b(s)$の大小は次のようになっている。すなわちある定数$m$があって

$$0 \leqq s \leqq m \text{ では } b(s) \leqq a(s), \quad s \geqq m \text{ では } a(s) \leqq b(s)$$

これは，$a(s)$が$s$の1次関数で$b(s)$が$s$の指数関数となっており，$a(0) = b(0)$となっていることから明らかである。

$a(s)$，$b(s)$の値の大きい方を$c(s)$と書くこととする。

なお，$n$が小さいときの整数$m$を具体的に*Excel*で計算した。その結果を次に示す。

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

補題1　$x \leqq c(s)$ ならば$h(n, x) \leqq c(s)$。

証明：仮定により$x$の桁数は$s$をこえない。その十進展開を$x = x_{s-1} \cdots x_0$と書くことができる。ただし，$x_{s-1}$などの上位の数が0となることもあり得るものとした。これから，

$$h(n, x) = h(n, x_{s-1}) + \cdots + h(n, x_0)$$

となって，

$$h(n, x_i) \leqq 9^n$$

故に　$h(n, x) \leqq 9^n s \leqq c(s)$。　（証明終）

補題１を繰り返し適用することにより，次の系を得る。

系２　$i$を任意の自然数とするとき，$x \leqq c(s)$ ならば $h^i(n, x) \leqq c(s)$。

これで定理１が示される。すなわち，ここでハピー列 $K(n, x) = \{h^s(n, x) \mid s = 0, 1, 2, \ldots\}$を考えると，系２により，そのすべての項が $c(s)$ をこえない。したがってKにおいては整数 $p < q$ があって

$$h^p(n, x) = h^q(n, x)$$

となる。すなわち，$\mathbf{K}(n, x)$ は循環列を含む。問題は循環列の有限性である。

補題３　次元 $n$ の値によって定まるある定数 $k$ があって，$x > k$ ならば $x > h(n, x)$。

証明：$x$ の桁数を $s+1$ とすれば，その十進展開は $x = x_s x_{s-1} \cdots x_0$ と書くことができる。これは $b(s) < x \leqq b(s+1)$ と同値である。$i = 0, 1, 2, \ldots, s$ で

$$h(n, x) \leqq 9^n (s+1)$$

だから

$$x - h(n, x) \geqq 10^s - 9^n (s+1) = b(s) - a(s+1) + 1$$

$s$ が十分大きければ，この右辺は常に正になる。そのような $s$ の最小値を改めて $s$ とし，定数 $k = b(s) = c(s)$ と定めればよい。　（証明終）

これを使って循環列の有限性を示す。補題３にいう $k$ を使い，自然数の集合Nを

$$N_k = \{x \mid x \leqq k\}, \quad \mathbf{M}_k = \{x \mid x \geqq k\}$$

の二つに分ける。$N_k$ は有限集合だから，この範囲では循環列も有限個しか存在しない。一方，$\mathbf{M}_k$ では $x$ に関する数学的帰納法で循環列が $\mathbf{N}_k$ における循環列の何れかに一致すること，したがって有限個しかないことを示そう。

まず $x = k$ ではそれは明らかである。そこで $x$ より小さい範囲で循環列が $\mathbf{N}_k$ におけるものと一致するものとし，$x$ でもそうなっていることを示せばよい。

補題３により $h(n, x) < x$ で，ここでは帰納法の仮定が有効である。したがって

$$\mathbf{K}(n, x)' = \{h^s(n, x) \mid s = 1, 2, \ldots\}$$

における循環列は $N_k$ における循環列の何れかに一致する。すなわち，$\mathbf{K}(n, x)$ における循環列は $\mathbf{K}_k$ における循環列の何れかに一致する。これで定理２が証明された。

## ４．その他

本来のハピー数は２次元で定義されており，そこでのハピー列は具体的に求められている。その一般化がこのノートの始まりである。基本的に循環列は分数の小数展開から始まったと解

すべきだろうから，もっと別の方法でハピー列の理論を展開できるかもしれない。いずれはそういう展開も考えてみたい。

各次元でハピー数は有限個しかないが，必ずしも1だけとは限らない。これは計算でわかった事実である。この計算記録は*Excel*で作った。次元にこだわらないような作り方をしたが，その詳細は省く。具体的なハピー列について，計算した結果を示す。

1次元：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9　　これらの周期はすべて1で10個ある。

2次元：0，1　（周期1，2個）

4　16　37　58　89　145　42　20　（周期8，1個）

3次元：0，1，153，370，371，407　（周期1，6個）

919　1459，136　244　（周期2，2個）

55　250　133，160　217　352　（周期3，2個）

4次元：0，1，8208　（周期1，3個）

2178　6514　（周期2，1個）

13139　6725　4338　4514　1138　4179　9219　（周期7，1個）

参考文献：*Stephen L. Snover & Mark A. Spikell : Brain Ticklers, 1981, Prentice-Hall Inc.,*

玄　光男，平井　伝逸訳：パズルとマイコン，1983，共立出版㈱