8．参考文献

1）Wilkinson J. H. : The Algebraic Eigenvalue Problem、OXFORD、p89－p90、(1988)

2）町田東一他：マトリクスの固有値の対角化、東海大学出版会、pp. 36－39、(1990)

3）牧之内三郎：数値解析、オーム社、pp. 77－83、(1975)

```
>e

e =

    1.000000000000000e-06

>s

s =

  22.36067977499790

>AAAA=[0 1 0;0 0 1;0.00001 0.0001 -0.1]

AAAA =

                  0   1.00000000000000                  0
                  0                  0   1.00000000000000
   0.00001000000000   0.00010000000000  -0.10000000000000

>eig(AAAA)

ans =

  -0.01000000000000
   0.01000000000000
  -0.10000000000000

>cond(AAAA)

ans =

    1.010000010000990e+05
```

表 3　改善前の固有値と条件数（ε＝0）
Table 3 Eigenvalues and condition number for k=1.（ε=0)

```
>e

e =

    1.000000000000000e-06

>s

s =

  22.36067977499790

>BBBB=[0 1 0;0 0 1;0.00001*s^3 0.0001*s^2 -0.1*s]

BBBB =

                  0   1.00000000000000                  0
                  0                  0   1.00000000000000
   0.11180339887499   0.05000000000000  -2.23606797749979

>eig(BBBB)

ans =

  -0.22360679774998
   0.22360679774998
  -2.23606797749979

>eig(BBBB)/s

ans =

  -0.01000000000000
   0.01000000000000
  -0.10000000000000

>cond(BBBB)

ans =

  53.78120168114937
```

表 4　改善後の固有値と条件数（ε＝0）
Table 4 Eigenvalues and condition number for k=sqrt(500).（ε=0)

6．おわりに

従来から、行列の固有値を、計算機を用いて計算する場合に必ず誤差が生じわずかな誤差によって大きく固有値の値が変化してしまう場合があることが問題になっていた。本稿においては、コンパニオン行列の誤差問題を扱い一般行列の誤差改善法を扱った。最初にコンパニオン行列の左固有ベクトル、右固有ベクトルを求め、特性方程式を $f(\lambda)$ とすると $|y^T x| = |f'(\lambda)|$ の関係を導き、対角要素に ε の誤差が生じた場合の評価ができる関係式であることを示し、この値が1ならば特性方程式および各固有値に対して ε 程度の誤差に収められることを示した。さらに、この関係を元に、3．4．において元の固有値の計算に対して、各固有値を k 倍することによって、誤差が生じた場合でも精度を向上させるための一つの改善法について考察した。詳しくは、3．4．5で述べた。
最後に、5．で誤差行列を仮定し、本方法の有効性をシミュレーションにより確かめた。

7．謝　辞

本研究にあたり、丁寧にご指導いただいた本学岡本茂教授並びに千葉大学美多勉教授に深く感謝致します。

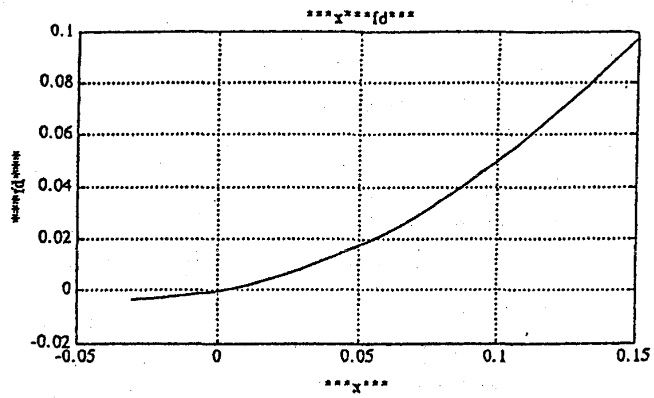

図2　補正のないときのλ－f'(λ)曲線

Fig. 2　A curve of the λ－f'(λ) without corrections (k=1).

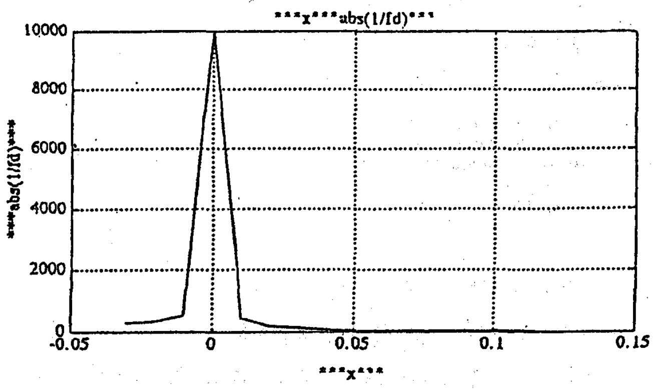

図3　補正のないときのλ－1／｜f'(λ)｜曲線

Fig. 3　A curve of the λ－1／｜f'(λ)｜ without corrections (k=1).

```
>e=0.000001;
>s=sqrt(500);
>AAAA=[e 1 0;0 e 1;0.00001*s^3 0.0001*s^2 -0.1*s+e]

AAAA =

   0.00000100000000   1.00000000000000                  0
                  0   0.00000100000000   1.00000000000000
   0.11180339887499   0.05000000000000  -2.23606697749979

>eig(AAAA)

ans =

  -0.22360579774998
   0.22360779774998
  -2.23606697749979

>eig(AAAA)/s

ans =

  -0.00999995527864
   0.01000004472136
  -0.09999995527864

>cond(AAAA)

ans =

   53.78118653964287

>x=(-2.5:0.01:0.25);
>f=x.^3+0.1.*x.^2.*s-0.0001.*x.*s.^2-0.00001.*s.^3;
>fd=3.*x.^2+0.2.*x.*s-0.0001.*s.^2;
>plot(x,f)
>plot(x,fd)
>f1=1.0;
>finv=f1./fd;
>finvabs=abs(finv);
>plot(x,finvabs);
```

表2　k=sqrt(500)の補正による誤差改善例

Table 2　Program list and results.

Inproved eigenvalues and condition number.

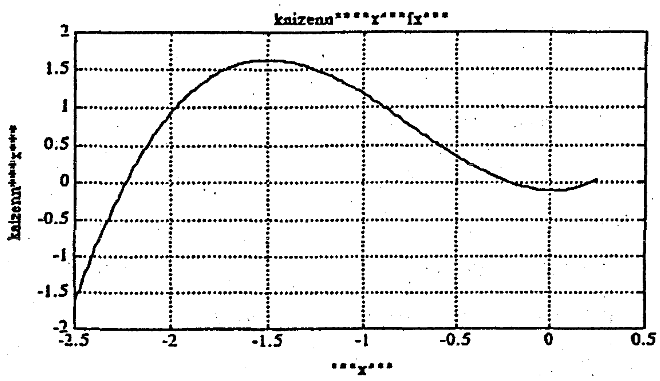

図4　k=sqrt(500)の補正によるλ－f(λ)曲線

Fig. 4　A curve of the λ－f(λ) for k=sqrt(500).

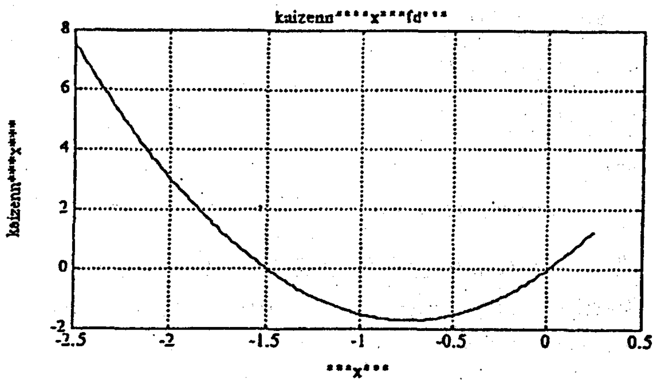

図5　k=sqrt(500)の補正によるλ－f'(λ)曲線

Fig. 5　A curve of the λ－f'(λ) for k=sqrt(500).

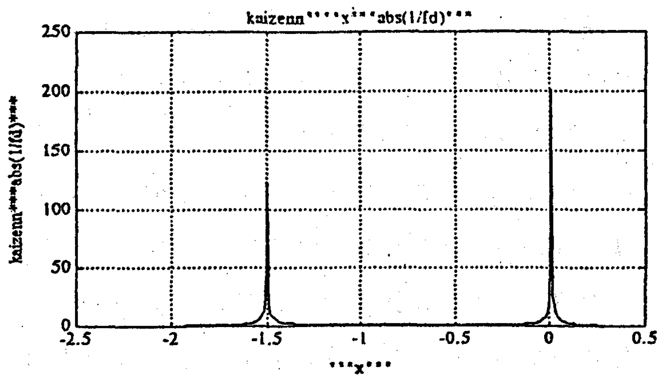

図6　k=sqrt(500)の補正によるλ－1｜f'(λ)｜曲線

Fig. 6　A curve of the λ－1／｜f'(λ)｜ for k=sqrt(500).

で割ることにより、元のコンパニオン行列に対する固有値を計算する。

5．例　題

次のコンパニオン行列Aに対して、誤差行列B（要素はすべて$\varepsilon = 10^{-6}$）が生じた場合の元の行列の固有値の変化を調べ、更に特性方程式の微分関数の絶対値をとった逆関数のグラフによる表示を行い、本稿の有用性を示す。行列Aを、

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.00001 & 0.0001 & -0.1 \end{pmatrix}$$

とし、誤差行列Bを

$$B=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

とすると、行列Aの特性方程式$f(\lambda)$は、

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 0.1\ \lambda^2 - 0.0001\lambda - 0.00001$$

となる。ここで、固有値の値は、−0.01、0.01、−0.1である。また、$f'(\lambda)$は、

$$f'(\lambda) = 3\ \lambda^2 + 0.2\lambda - 0.0001$$

となる。λ（$=x$）に対する$f(x)$の曲線を図1に示し、その、微分曲線を図2に示す。ここで、$f'(-0.01)=0.002$、$f'(0.01)=0.002$、$f'(-0.1)=0.01$ほどである。図3には、$1/|f'(\lambda_1)|$の関係をグラフで示た。ここで、$1/f'(\lambda_i)=500$、$1/f'(\lambda_2)=500$、$1/f'(\lambda_3)=100$程度となるから、最大値を500に選択する。ここで、(25)式の関係を用いると、$k=\mathrm{sqrt}(500)=22.3$となる。ここで、誤差行列Bを仮定し、特性方程式にk要素を取り込んで計算した場合と、そうでない場合の、影響をシミレーションし固有値の変化を調べた。その結果、固有値をk倍し、求められた固有値をkでわって求めたほうが、有効数字の桁数でまさっていることがわかる。また、condition-numberも改善され非常に小さくなっていることもかわる。プログラムの様子は、表2に示す。改善のグラフの様子を図4（$f(\lambda)$曲線）、図5（$f'(\lambda)$曲線）、図6（$1/f'(\lambda)$の絶対値をとった曲線）を示す。

```
>x=(-0.03:0.01:0.15);
>f=x.^3+0.1.*x.^2-0.0001.*x-0.00001;
>fd=3.*x.^2+0.2.*x-0.0001;
>plot(x,f)
>plot(x,fd)
>f1=1.0;
>finv=f1./fd;
>finvabs=abs(finv);
>plot(x,finvabs);
```

表1　補正のないときのプログラムリスト
Table 1　Program list of simulation without corrections(K=1)

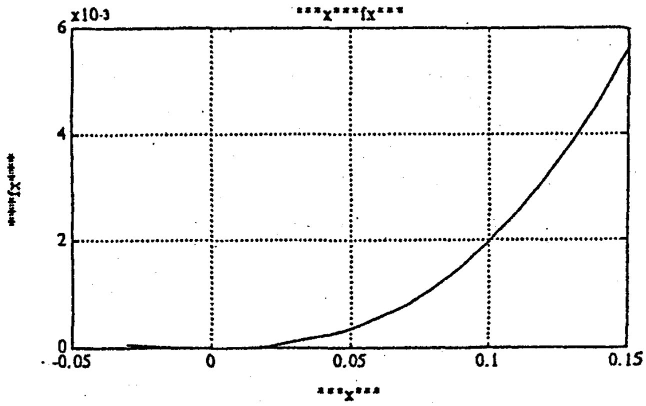

図1　補正のないときの$\lambda - f(\lambda)$曲線
Fig. 1 A　curve of the $\lambda - f(\lambda)$ without corrections (k=1).

$$\lambda_i(\varepsilon)-\lambda_i) \tag{22}$$

(22) 式を (20) 式に代入すると、$\lambda_i(\varepsilon)-\lambda_i=\varepsilon$となる。従って、(17) 式は $|f'(\lambda_i)|=1$の関係をもって満足される。逆に1であれば、誤差ε程度の特性方程式の誤差を生ずることになる ((20) 式から)。

すなわち、$|f'(\lambda_i)|=1$の値は対角要素にεの誤差が生じたとき特性方程式および固有値の誤差を ε 程度にするための条件となる。

4. 固有値の移動と誤差に対する改善法

2で求めた関係を用いて、ここでは各固有値の誤差の影響を減少させる方法を考える。コンパニオン行列Aに対する特性方程式及びその、微分関係はそれぞれ、(23) 式、(24) 式となる。

$$f(\lambda)=\lambda_i^{n}+a_n\lambda_i^{n-1}+\cdots+a_2\lambda_i+a_1 \tag{23}$$

$$f'(\lambda)=n\lambda_i^{n-1}+(n-1)a_n\lambda_i^{n-2}+\cdots+a_2 \tag{24}$$

固有方程式$f(\lambda)$に対して、各根をk倍することを考える。そして、各固有値に対して、$\overline{\lambda}=k\lambda$の関係を仮定する。この時、k倍された固有方程式を$F(\overline{\lambda})$と置くと、

$$F(\overline{\lambda})=\overline{\lambda}^{n}+a_nk\overline{\lambda}^{n-1}+\cdots+a_2k^{n-1}\overline{\lambda}+a_1k^n \tag{25}$$

となる。(25) 式をλに関して微分すると、

$$F'(\overline{\lambda})=n\overline{\lambda}^{n-1}+a_nK(n-1)\overline{\lambda}^{n-2}+\cdots+a_2k^{n-1} \tag{26}$$

となるから、(26) 式に対して、さらに、$\overline{\lambda}=K\lambda$の関係を用いると、

$$F'(\overline{\lambda})=k^{n-1}(f'(\lambda)) \tag{27}$$

がなりたつ。従って、もとのコンパニオン行列の固有値を求めるとき、各λ_iに対して、最小の$|f'(\lambda_i)|$を求めることは容易であるから、その逆数によって、誤差に対して、敏感か、鈍感かは定まる。これは、文献(1)と2.および3.で導いた結果から、$1/|f'(\lambda_i)|$の値が1となることが誤差の影響をε程度とすることになるから、$1/|f'(\lambda_i)|$の最小値が非常に大きい場合、(27) 式を使用することにより、$|F'(\overline{\lambda}_i)|$の最大値をkの選択により決定でき、1に調整することが出来る。まとめると、次のようになる。

(1) 元のコンパニオン行列に対して、特性方程式を求める。

(2) 特性方程式の微分関数を求め、各固有値に対する絶対値を求める。

(3) (2)で求めた各値の逆数の最大値を求める。

(4) 逆数の最大種が非常に大きい時はその固有値の値は、わずかな誤差に対し、大きく変動する可能性を含む。この場合、(25)式の関係を用いて、$f'|(\overline{\lambda})|$を1にするためのkを選択する。

(5) 次のコンパニオン行列に対する固有値の計算を行う。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0\cdots & & 0 & 1 \\ -a_1k^n & -a_2k^{n-1}\cdots & & -a_{n-1}k^2 & -a_nk \end{pmatrix}$$

(6) k倍されたすべての固有値に対して、k

$$\lambda_i(\varepsilon)-\lambda_i=\varepsilon/|y^Tx|$$
$$=\varepsilon/|f'(\lambda_i)| \qquad (17)$$

の関係が成立する。従って、すべての固有値に対して $f'(\lambda_i)=1$ の関係が成立すればすべての固有値の誤差は ε 程度となることが保証されることになる。

3. コンパニオン行列および一般行列の対角要素に誤差 ε が生じた場合の特性方程時の変化と $f'(\lambda)$ の関係

(3)式で示したコンパニオン行列に対する特性方程式は $f(\lambda)=\lambda_i^n+a_n\lambda_i^{n-1}+\cdots+a_2\lambda_i+a_1$ となる。また、対角要素にそれぞれ、ε の誤差が生じた場合の特性方程式は、

$$f(\lambda_i)=(\lambda_i+\varepsilon)^n+a_n(\lambda_i+\varepsilon)^{n-1}+\cdots+a_n(\lambda_i+\varepsilon)+a_1 \qquad (18)$$

となる。従って、(18)式においてすべての λ_i に対して $\lambda_i>\varepsilon$ の関係が成り立ち $\varepsilon<1$ の場合一次近似をとると、

$$\begin{aligned} f(\lambda_i)&=\lambda_i^n+n\varepsilon\lambda_i^{n-1}+a_n\lambda_i^{n-1}+a_n(n-1)\varepsilon\lambda_i^{n-1}+\cdots+a_2\lambda_i+a_2\varepsilon+a_1\\ &=\lambda_i^n+a_n\lambda_i^{n-1}+\cdots+a_2\lambda_i+a_1\\ &\quad+\varepsilon(n\lambda_i^{n-1}+(n-1)a_n\lambda_i^{n-2}+\cdots+a_2) \end{aligned} \qquad (19)$$

となる。従って各固有値に対して、特性方程式の ε による変化は、誤差を含む特性方程式を f_ε とする次式で表現される。

$$f_\varepsilon(\lambda_i)=f(\lambda_i)+\varepsilon f'(\lambda_i) \qquad (20)$$

同様に、一般行列に対して、対角要素に等しい誤差 ε が生じた場合の誤差を含んだ行列式は、

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda+\varepsilon & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda+\varepsilon & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n}\\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1}-\lambda+\varepsilon & a_{n-1n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn}-\lambda+\varepsilon \end{pmatrix} \qquad (21)$$

となるから、同様に一次近似をとると(19)式が成立する。従って、一般行列とコンパニオン行列に対する誤差の関係は同じ式で表現される。それゆえ特性方程式 $f(\lambda_i)$ に対し各固有値に対する値は、理論的に0であるから $f'(\lambda_i)$ の各固有値に対しての値が特性方程式に影響を与えることを示す。つまり、対角要素に誤差 ε が生じた場合、本来理論的にはすべての固有値に対して、特性方程時の値は0であるが微分値が非常に大きいときに誤差によって大きく変動する可能性をもつことになり特性方程式の根すなわち、固有値を変動させることになる。従って、$f'(\lambda)$ の絶対値は各固有値に対して小さいほうがよいことになる。1程度であれば特性方程式に対する誤差は ε 程度となる。ここで、誤差行列と $|f'(\lambda_i)|$ の大きさの選択について(17)式および(20)式を使用し、固有値、特性方程式の誤差を ε 程度にするには $|f'(\lambda_i)|=1$ とすればよいということについて述べる。一次近似誤差に対して(20)式から $f_\varepsilon(\lambda_i)=f(\lambda_i)+\varepsilon f'(\lambda_i)$ が成立する。また、ここで、特性方程式の微分関数に対し、

$\triangle f(\lambda)=(f_\varepsilon(\lambda_i)-f(\lambda_i)$、$\triangle\lambda=(\lambda_i(\varepsilon)-\lambda_i)$ とし、$\triangle f/\triangle\lambda=f'(\lambda)$

とおいて、近似計算を行うと(21)式となる。

$$f'(\lambda_i)=(f_\varepsilon(\lambda_i)-f(\lambda_i))/$$

$$P=(P_1,\ P_2,\ P_3,\cdots,\ P_n)$$

$$=\begin{pmatrix} -a_1/\lambda_1 & \cdots & -a_1/\lambda_n \\ (-a_1-a_2\lambda_1)/\lambda_1^{2} & \cdots & (-a_1-a_2\lambda_n)/\lambda_n^{2} \\ (-a_1-a_2\lambda_1-a_3\lambda_1^{2})/\lambda_1^{3} & \cdots & (-a_1-a_2\lambda_n-a_3\lambda_n^{2})/\lambda_n^{3} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ (-a_1-a_2\lambda_1-a_3\lambda_1^{2}-\cdots-a_{n-1}\lambda_1^{n-2})/\lambda_1^{n-1} & \cdots & (-a_1-a_2\lambda_n-a_3\lambda_n^{2}-\cdots-a_{n-1}\lambda_n^{n-2})/\lambda_n^{n-1} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

となる。次に、コンパニオン行列Aに対する固有ベクトル x_i 及び A^T に対する固有ベクトル、y_i（$i=1\sim n$）に対して、$|y_i^T x_i|$ の関係を一般的に考えることとする。

（2）式、(13) 式の関係を用い、

$$|y_i^T x_i|=|-a_1/\lambda_i,\ -a_1-a_2\lambda_i/\lambda_i^{2},\ \cdots\cdots,\ -a_1-a_2\lambda_i-a_3\lambda_i^{3}-\cdots-a_n\lambda_i^{n-1}/\lambda_i^{n}).\ x_i| \tag{14}$$

となる。ここで、x_i は、

$$x_i=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_i^{n} \end{pmatrix} \tag{15}$$

であるから、(14) 式は、

$$\begin{aligned} |y_i^T\ x_i| &= |-a_1/\lambda_i+(-a_1-a_2\lambda_i)/\lambda_i+\cdots+(-a_1-a_2\lambda_i-a_3\lambda_i^{2}-\cdots-a_n\lambda_i^{n-1})/\lambda_i| \\ &= |-(na_1+(n-1)\ a_2\lambda_i+(n-2)\ a_3\ \lambda_i^{2}+\cdots+a_n\lambda_i^{n-1})/\lambda_i| \\ &= |-1/\lambda_i((-\lambda_i^{n})+(-\lambda_i^{n}-a_n\lambda_i^{n-1})+\cdots+(-\lambda_i^{n}-a_n\lambda_i^{n-1}-\cdots a_2\lambda_i))| \\ &= |n\ \lambda_i^{n-1}+(n-1)a_n\lambda_i^{n-2}+(n-2)a_{n-1}\lambda_i^{n-3}\cdots+a_2| \\ &= |f'(\lambda_i)| \end{aligned} \tag{16}$$

となる。

2.2 $|f'(\lambda_i)|$ と ε の影響度について

ここで、文献（1）の考えを適用し、$\lambda_i(\varepsilon)$ を誤差を含む固有値 λ_i を誤差のない固有値とすると、

$$C_{11}-\lambda_1 C_{12}-a_2 C_{1n}=0 \qquad (9\text{-}3)$$

に対して、

$$C_{12}=(C_{11}-a_2 C_{1n})/\lambda_i \qquad (9\text{-}4)$$

となる。同様な操作によって、

$$C_{1n}=C_{1(n-1)}/(\lambda_i+a_n) \qquad (9\text{-}5)$$

となるので、さらに、(9－2) 式を (9－4) 式に代入すると、

$$C_{12}=C_{1n}(-a_1-a_2\lambda_i)/\lambda_i^2 \qquad (9\text{-}6)$$

同様にして、

$$C_{13}=C_{1n}(-a_1-a_2\lambda_i-a_3\lambda_i^2)/\lambda_i^3 \qquad (9\text{-}7)$$

が成立する。次に、C_{1n} についての計算を行うと、

$$\begin{aligned} C_{1n} &= (C_{1(n-1)}-a_n C_{1n})/\lambda_i \\ &= C_{1n}(-a_1-a_2\lambda_i-a_3\lambda_i^3- \\ &\quad \cdots-a_n\lambda_i^{n-1})/\lambda_i^n \end{aligned} \qquad (9\text{-}8)$$

となる。ここで、特性方程時の関係を用いると、

$$\begin{aligned} C_{1n} &= C_{1n}\lambda_i^n/\lambda_i^n \\ &= C_{1n} \end{aligned} \qquad (9\text{-}9)$$

となるので、任意となる。ここで、$C_{1n}=1$とし、まとめると、

$$p_1=\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ \vdots \\ C_{1n} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -a_1/\lambda_1 \\ (-a_1-a_2\lambda_i)/\lambda_1^2 \\ (-a_1-a_2\lambda_i-a_3\lambda_i^2)/\lambda_1^3 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ (-a_1-a_2\lambda_1-a_3\lambda_1^2-\cdots \\ -a^{n-1}\lambda_1^{n-2})/\lambda_1^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

が、成立する。同様に、 $C_{2n}=1$ と置くと、

$$p_2=\begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ \vdots \\ C_{2n} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -a_1/\lambda_2 \\ (-a_1-a_2\lambda_2)/\lambda_2^2 \\ (-a_1-a_2\lambda_2-a_3\lambda_2^2)/\lambda_2^3 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ (-a_1-a_2\lambda_2-a_3\lambda_2^2-\cdots \\ -a_{n-1}\lambda_2^{n-2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

となるから、

$$C_{1n}=C_{2n}=C_{3n}=\cdots=C_{nn}=1 \qquad (12)$$

と置くと、

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \lambda_3 & \\ & 0 & & \cdots\cdots\cdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

また、Aの転置行列 A^T を対角化するモードマトリクスを求めることを考える。最初に

$$B(\lambda_i)=(A^T-\lambda_i I)$$
$$=\begin{pmatrix} -\lambda_i & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & -a_1 \\ 1 & -\lambda_i & \cdots & & -a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda_i & \cdots & -a_3 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & 1 & (-\lambda_i-a_n) \end{pmatrix} \tag{5}$$

とする。

$$|B(\lambda_i)|\cdot I=B\cdot \mathrm{adj}B(\lambda_i)$$
$$=0\cdot I \tag{6}$$

となる。ここでは I は単位行列である。さらに、$B(\lambda_i)$ の随伴マトリクス $\mathrm{adj}B(\lambda_i)$ を、

$$\begin{pmatrix} C_{11}(\lambda_i) & C_{21}(\lambda_i) & \cdots\cdots & C_{n1}(\lambda_i) \\ C_{12}(\lambda_i) & C_{22}(\lambda_i) & \cdots\cdots & C_{n2}(\lambda_i) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ C_{1n}(\lambda_i) & C_{2n}(\lambda_i) & \cdots\cdots & C_{nn}(\lambda_i) \end{pmatrix} \tag{7}$$

と置くと、

$$B(\lambda_i)\cdot \mathrm{adj}B(\lambda_i)=$$
$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & \cdots\cdots & & & -a_1 \\ 1 & -\lambda_i & \cdots & & -a_3 \\ 0 & 1 & -\lambda_i & \cdots & -a_3 \\ & \cdots\cdots & & & \\ & \cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & 1 & (-\lambda_i-a_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11}(\lambda_1) & C_{21}(\lambda_i) \cdots & C_{n1}(\lambda i) \\ C_{12}(\lambda_1) & C_{22}(\lambda_i) \cdots & C_{n2}(\lambda i) \\ \cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots & & \\ C_{1n}(\lambda_1) & C_{2n}(\lambda_i) \cdots & C_{nn}(\lambda i) \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{c:c:c} -\lambda_i C_{11}-a_1 C_{1n} & -\lambda_i C_{21}-a_1 C_{2n} & -\lambda_i C_{n1}-a_1 C_{nn} \\ C_{11}-\lambda_i C_{12}-a_2 C_{1n} & C_{21}-\lambda_i C_{22}-a_2 C_{2n} & C_{n1}-\lambda_i C_{n2}-a_2 C_{nn} \\ C_{12}-\lambda_i C_{13}-a_3 C_{1n} & C_{22}-\lambda_i C_{23}-a_3 C_{2n} & C_{n2}-\lambda_i C_{n3}-a_3 C_{nn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ C_{1(n-1)}-\lambda_i C_{1n}-a_n C_{1n} & C_{1(n-1)}-\lambda_i C_{2n}-a_n C_{2n} & C_{n(n-1)}-\lambda_i C_{nn}-a_n C_{nn} \end{array}\right)$$
$$=0 \tag{8}$$

が成立する。(8)式の1列の関係を考慮すると、(8)式の1列に関して、$\lambda i \neq 0$ とすると、

$$-\lambda_i C_{11}-a_1 C_{1n}=0 \tag{9-1}$$

から、

$$C_{11}=-a_1 C_{1n}/\lambda_i \tag{9-2}$$

さらに、次式

する。1の時ε程度となる。そこで、もとのコンパニオン行列に対して、最小の$|y^T x|=|f'(\lambda)|$を決定し、その値を求める。これは、各固有値に対して最大誤差を生じるのは最小の$|y^T x|$となるからである。

(3) 一般行列とコンパニオン行列の特性方程式は等しいので微分した関数は当然等しくなる。また、両方の行列に対して、対角要素に等しい誤差εが発生した場合の特性方程式は、誤差のないときの特性方程式を$f(\lambda)$とすると対角要素に等しい誤差εが生じるとき誤差の二次以上を省略すると$f_\varepsilon=f(\lambda+\varepsilon)=f(\lambda)+\varepsilon f'(\lambda)$に等しくなる事を示す。従って、特性方程式$f(\lambda)$に対し各固有値に対する値は、理論的に0であるから$f'(\lambda)$の各固有値に対しての値が特性方程式に影響を与えることを示す。

(4) (2)及び(3)から逆に$|f'(\lambda_i)|=1$にすること、および微分に関する考えを応用し、対角要素に誤差εが存在するとき誤差の条件数的役割をはたす関係$1/|y^T x|$が成立することを示した。

(5) (4)で述べた行列の対角要素に等しい誤差εが生じた場合のもとの固有値変化をε程度又はεより少なくするための改善法を考えた。ただし本論文においてはすべての固有値に対して改善前の$|f'(\lambda_i)|$の値は比較的小さいものとして考えた。各固有値の値をk倍した場合の特性方程式は元の特性方程式の係数とk^{n-1}の累乗によって対応付けることができkの値は決定できる。したがって、コンパニオン行列の1および0を除く要素のkの累乗倍より(すべてがk倍ではない) kの調節により$|f'(\lambda)|=1$に出来れば誤差に対する影響を軽減できると考えられる。

(6) その結果、もとのコンパニオン行列の$|y^T x|=|f'(\lambda)|$の値が非常に小さい場合に(各固有値に対して)改善された精度のよい固有値が計算出来ることを示した。と同時に条件数の改善も行われる事も例題から示した。

2.1 $y_i^T x_i=f'(\lambda_i)$の証明

一般に重複した固有値がない場合、コンパニオン行列を対角化するモードマトリクスは、ヴァンデルモンデで行列である。任意の行列Aに対してヴァンデルモンデ行列をVとすると、次式が成立する。

$$V^{-1}AV=\Lambda \tag{1}$$

ここで、

$$V=\begin{pmatrix} 1 & 1\cdots & & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2\cdots & & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1}\cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0\cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

(1) 行列の一次摂動に関する固有値の誤差に対する一考察

田口　功

A atudy on the errors of eigenvalues for the First-order perturbations of the companion matrix.

Isao Taguchi

1. はじめに

一般に行列の固有値を計算機を用いて計算する割合、誤差が問題となる。特に、ill-condition 行列の場合には行列の特性方程式自身が大きく変化して固有値の値が微少な誤差で大きく変化することになる。一般的に求められた固有値に対する相対誤差の変化の度合いを評価するに condition number （条件数）が計算される。

行列自身の条件数を改善する方法はいまのところ余り考えられていないようである。ところで条件数とは異なるがもうひとつの固有値計算の誤差評価方法として行列Aの正規化されない固有ベクトルを x, 行列Aの転値行列 A^T の正規化されない固有ベクトルを y とした場合 $1/|y^Tx|$ の値を求めることによっても誤差による固有値変化の度合いを評価出来ることが文献 (1) によって知られている。しかし、$|y^Tx|$ と固有値との間でどのような関係があるか一般的関係は求められていない。そこで、本稿では、重複固有値がない時コンパニオン行列に対して一般的に $|y^Tx|$ と特性方程式との関係を求めた。その結果、行列の特性方程式を $f(\lambda)$ とすると、$|y^Tx| = |f'(\lambda)|$ の関係があることが導かれた。ここで、$f'(\lambda)$ は、特性方程式 $f(\lambda)$ の微分を表す。$|y^Tx| = |f'(\lambda)|$ の関係を利用しコンパニオン行列、および一般行列の固有値計算を行う場合において二次以上の誤差を無視した場合の誤差に関する一つの改善法を以下のようにして考察した。

(1) コンパニオン行列の1および0を除く係数は特性方程式の係数と＋、一符号を除けば一致する。特性方程式の微分関数は次元と係数がわかれば容易に決定出来る。従って、コンパニオン行列をもとに一般行列に拡張することを (2) 以下の方針に従って考えた。

(2) 最初に、$|y^Tx| = |f'(\lambda)|$ の値が大きければ大きいほどコンパニオン行列に対して、一次近似誤差に対する影響を受けなくなることを示す。(文献 (1) の結果を考察し、対角要素に等しい ε の誤差が生じた場合 $|y^Tx| = |f'(\lambda)|$ の値が誤差に対する条件数的役割をはたすことを示すことを一般化した）これは、$|f'(\lambda_i)|$ の値が1より大きければ大きいほど ε に対する λ の誤差は少なくなり1より小さければ小さいほどその影響度は増加