

を動かすための負荷の抵抗の最小値が決定されるわけである。直列に負荷を接続すれば負荷の助けをかりて電流計が守られていると考えてもよいとも考えられる。これとは逆に電流計を負荷に並列に接続した場合を考える。図2(b)に示すように同じ電池を使用したとしても非常に危険な状態になると考えられる。(19)式を用いて考えてみると、回路的には並列に抵抗が2個接続されていることになるので抵抗Rが巻線の内部抵抗となる。巻線の内部抵抗は比較的小さく普通数オーム程度である。それゆえ接続するレンジ $\theta(\infty)$ は非常に大きくふれると同時に大電流が流れ巻線を焼き切る事になる。そのため電流計は絶対に負荷に並列に接続してはならない事になる。

3. おわりに

本学紀要第6号においては可動コイル形計器の振れの定常状態における目盛の平等性を明らかにした。今回はさらに過渡的状态を考え、計器の機械的構造が決まった場合、振れの定常値に達する時間的变化特性を決定するのは、コイルの内部抵抗および負荷抵抗であるという事を式的に考えた。さらによく物理実験などで問題になる電流計の負荷に対しての並列接続の危険性についても振れ角のうえから検討をした。

4. 要 約

小学校、中学校を通じて回路の実験をする時は必ずといってよいほど可動コイル形電流計、可動コイル形電圧計が使用される。本紀要第6号においては、可動コイル型電流計の定常状態を扱い、可動コイル形計器特有の性質である目盛の平等性について示した。本紀要においては、少し進んで定常状態だけではなく過渡状態の特性を現代制御理論を用い、状態方程式を不足制動という条件で解いた。一般に過渡特性をよくするために外部臨界制動抵抗を用いてあると言

われる。抵抗だけによって指針をある時間で定常値におちつかせるように調整してあると言われていたが、本研究において式的にその理由を示した。また負荷抵抗によって振れ角の過渡特性に差が生じる事も結局抵抗が関係しているからであるという事も示した、次に“電流計は負荷に直列に接続し、絶対並列に接続してはならない”という基本的な事項をふれ角 $\theta(t)$ を扱い、並列に接続した場合振れ角 θ は電流計の内部抵抗によって流れる電流のため、通常振れてはならない角度に達してしまう事を示し、電流計をこわしてしまうという事も示した。また非常に抵抗が小さいために非常に速く指針が振れるために指針も破損してしまう可能性がある事もわかった。

5. 参考文献

- 1) 美多 勉著: システム制御理論入門、実教出版
- 2) 美多 勉著: システム制御理論演習、昭晃堂
- 3) 増淵正美著: 自動制御例題演習、コロナ社
- 4) 辻 芳明著: 電気計器、電気書院
- 5) 松浦省三著: 応用数学例題演習、コロナ社
- 6) 佐藤真平共著: ラプラス変換演習、共立出版
- 7) E・クラツィグ著、田島一郎共訳、常微分方程式、培風館
- 8) 田口 功、本学紀要 第6号 P21~P26

$$y = \theta(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \}$$

$$= \frac{K_T E}{R I_m} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{S(S+S_1)(S+S_2)} \right\} \quad (16)$$

ここで $\alpha = \frac{1}{2} \frac{K_T K}{R I_m}$, $\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\tau}{I_m} - \left(\frac{K_T K}{R I_m} \right)^2}$
とくと (16) 式は、

$$\theta(t) = \frac{K_T E}{R I_m} \cdot \left\{ \frac{I_m}{\tau} - \frac{1}{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \theta_c) \right\} \quad (17)$$

と計算出来る。ここで $\theta_c = \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$ である。

(17)式は初期状態および定常状態における条件を満足しなければならない。最初に定常状態、つまり $t \rightarrow \infty$ におけるふれ角を考える事にする。(17)式を考えると、 $t \rightarrow \infty$ においては第2項は0となるので第1項のみが残る。したがって、

$$\theta(\infty) = (K_T E / R I_m) \cdot (I_m / \tau) \quad (18)$$

$$= \frac{K_T E}{R \tau} \quad (19)$$

となり本紀要第6号の結果と一致している事がわかる。 $t=0$ においても同様に考えると (17) 式に $t=0$ を代入すると、

$$\theta(0) = \frac{K_T E}{R I_m} \left\{ \frac{I_m}{\tau} - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{K_T^2 K^2}{R^2 I_m^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4\tau}{I_m} - \frac{1}{4} \cdot \frac{K_T^2 K^2}{R^2 I_m^2} \right) \right\} = 0 \quad (20)$$

となるので確かに解(17)式は初期値も満足している事がわかる。ここで(17)式を考えると次の事が言える。

- ①一般に可動コイル形計器の過渡特性を支配する関係式の中に負荷抵抗とか電源の電圧が影響するという事が今までははっきり述べられていなかった。現代制御論的に解析を行なった結果、 α の中に R が含まれている事からその大きさによって定常値に達するまでの時間に変化を与えている事もわかった。
- ②電圧計、電流計共に構造的にはほとんど変わらない。異なるところは、測定しようと

して使用する2つのレンジ間に接続されている抵抗値が異なっているのである。ただ電圧計の抵抗値が電流計の抵抗値に比較して 10^3 倍位一般的には大きいのである。したがって②を詳しく論ずれば次の事がいえる可動コイル型計器の機械的構造が決定した場合ふれ角の時間的変化または時間的特性を決めるのは計器のレンジ間の抵抗である。また負荷となる抵抗によってもその時間特性が異なってくるという事もわかる。

2. 電流計の接続について

一般に電流計は負荷に並列に接続してはならない。常に負荷に対して直列に接続しなければならない。この事について考えてみる事にする。

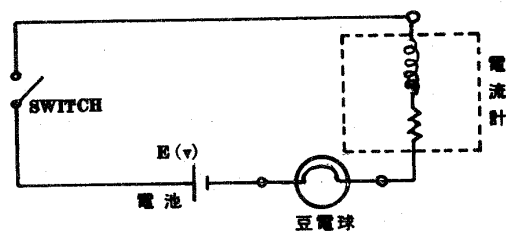


図2 (a) : 電流計の直列接続

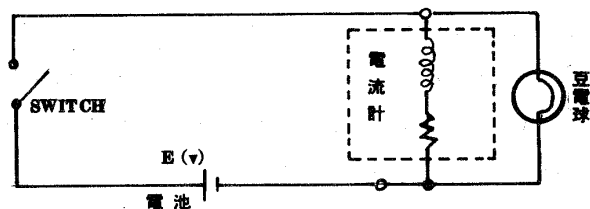


図2 (b) : 電流計の並列接続

図2(a)は負荷を豆電球とした場合の接続を示している。 R は豆電球の抵抗, R_i は可動コイルの内部抵抗, L はコイルのインダクタンスを示している。 E はもちろん電池の電圧である。この場合の電流計のふれを決定する抵抗は、

$$R = R_L + R_i \quad (21)$$

となる。ここで(19)式の定常状態の式を吟味する。電流計のあるレンジで測定出来る最大角は(21)式の抵抗と電池の電源によって決定される。したがって電流計の目盛のフルスケールに指針

となり、さらに(4)式をラプラス変換すると、

$$Y(s) = CX(s) \quad (6)$$

であるから(5)式を(6)式に代入すると、

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + C(sI - A)^{-1} bE(s) \quad (7)$$

となる。ここで $x(0)$ は初期値を表わしており、 $E(s)$ は電源の電圧をラプラス変換した関数であり、 I は単位行列を表わしている。メーターが振れる最初の瞬間の振れ角と振れ角速度は0と考えてよいので(7)式は

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} bE(s) \quad (8)$$

と簡単になる。(8)式の関係ブロック線図で表わし、入力、出力の関係をわかりやすく書き

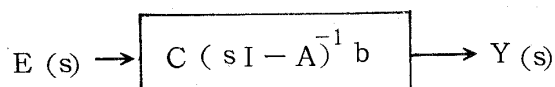


図1：伝達関数

表わすと、図1のようなになる。図1に示す伝達関数を具体的に求めるためにまず $(sI - A)^{-1}$ を求める事にする。

$$(sI - A)^{-1} = \text{adj}(sI - A) / |sI - A| \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{となり、行列式は} \quad |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{\tau}{Im} & S + \frac{K_T K}{R Im} \end{vmatrix} \\ &= S^2 + \frac{K_T K}{R Im} S + \frac{\tau}{Im} \end{aligned} \quad (10)$$

と展開出来る。(9)式における $\text{adj}(sI - A)$ は余因子行列を表わしている。(10)式における S はこのシステムの動特性を支配する固有値と呼ばれるものである。(10)式を0とおいて S についての2次方程式を解くのであるが解の形は3種類が考えられる。

① s が2つの実根を持つ場合

② s が重根を持つ場合

③ s が共役複素根を持つ場合

ここで一般的に小学校、中学校で使用され、市販されている電圧計、電流計を考えてみると、指針の振れ方は振動的には設計されていないように思われる。計測的には不足制動といわれる。

ところで③の場合は過制動といわれ、一定値におちつくまでの時間が多くかかってしまうのでこの条件では設計は行なわれていない。こう考えていくと理論的には③の重根をとって設計した方がよいと考えられる。しかし実際には指針が一たん行きすぎてから所定の位置にもどるようにしている。つまり少ないながらも指針は振動している⁽⁴⁾という事はほとんどの計器が③の条件で設計されていく事になる。したがって本稿においては固有値が共役複素根を持つという条件のもとに時間的変化を考えることにする。

ところで(10)式を0とおいてその根を求めた時システムが安定(つまり定常値におちつく)でしかも共役複素根を持つとしその解を求めると、

$$S_1 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{K_T K}{R Im} + \sqrt{\left(\frac{K_T K}{R Im}\right)^2 - \frac{4\tau}{Im}} \right\} \quad (11)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{K_T K}{R Im} - \sqrt{\left(\frac{K_T K}{R Im}\right)^2 - \frac{4\tau}{Im}} \right\} \quad (12)$$

となる。但し S_1, S_2 が共役複素根であるので、

$$\left(\frac{K_T K}{R Im}\right)^2 < \frac{4\tau}{Im} \quad (13)$$

という関係が成立している。以上を考えにいれて伝達関数行列を求め展開を行なうと、

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\begin{bmatrix} S + \frac{K_T K}{R Im} & 1 \\ -\frac{\tau}{Im} & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_T}{R Im} \end{bmatrix}}{(S + S_1) \cdot (S + S_2)} \cdot E(s) \quad (14)$$

$$= \frac{1}{(S + S_1)(S + S_2)} \left(\frac{K_T}{R Im}\right) \cdot \frac{1}{S} E \quad (15)$$

となる。(14)式の $E(s)$ は電源電圧のラプラス変換を意味しているから、(15)式においては直流電源入力と考えて $\frac{1}{S}$ をかけている。したがって(15)式における E は電池の電圧を表わしている。(15)式の逆ラプラス変換を考えると振れ角の時間的変化の関係が出てくるから、出力 y は以下のように計算出来る。

電流計と電圧計の過渡応答

田 口 功

The Transient Responses of Ampere meter and Volt meter.

by Isao Taguchi

はじめに

小学校、中学校を通じて直流電流、直流電圧を測定する時、可動コイル形計器を用いて実験を行なっている。本紀要第6号においては、現代制御理論でよく使用されている状態方程式を利用して可動コイル型電流計の平等目盛性を示すと共に演示実験用電流計の製作を行なった。今回は両計器の振れの時間的变化を考え、時間に対する指針の振れ角を扱う。ここで振れ角の時間的变化はどのように変わるのかを式的に明らかにする。そこで、可動コイル型計器は、力学系、電気系の組み合わせで時間特性が決定される事を示し、負荷の大きさ、電源の大きさによって特性が変化する事を示す。次に電流計の負荷に対する接続の仕方を考え、なぜ電流計は負荷に対して直列につなぎ、並列に接続してはならないという事について振れ角の上から考え1つの注意を与える。

1. 可動コイル形計器の構造と時間応答について

計器を1つのシステムと考え、入力が電池の電圧 $E(t)$ 、出力を指針の振れ角 x_1 とし、振れ角の時間的变化、つまり角速度を x_2 とし、状態方程式を考えると、文献に記述したように、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\tau}{Im} & -\frac{K_T K}{R Im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_T}{R Im} \end{bmatrix} \cdot E(t) \quad (1)$$

となり、出力方程式は、

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \quad (2)$$

となる。ここで τ は、うず巻きばねのばね定数、 Im は回転部分の慣性モーメント、 K_T は可動コイルの巻数、回転半径、永久磁石の磁束密度などにより決定される定数である。また K はコイルが回転した時に、その角速度に応じて逆起電力が発生するのであるが、その比例定数である。 R はもちろん閉回路全体の抵抗となっている。また、(1)式、(2)式を計算がしやすくするために以下のようにおいて考えることにする。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\tau}{Im} & -\frac{K_T K}{R Im} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_T}{R Im} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

すると、(1)式、(2)式はそれぞれ(3)式、(4)式となる。

$$\dot{x} = Ax + bE \quad (3)$$

$$y = Cx \quad (4)$$

ここで \dot{x} , x , b は2行1列のベクトルであり、 A は2行2列の行列を表わしている。 C は1行2列のベクトルを表わしており、 E , y はスカラーである。解を求めるために(3)式をラプラス変換すると、

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + bE(s)$$

となるから $X(s)$ について解くと、

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} bE(s) \quad (5)$$