

# 数のある配列について

三 浦 午次郎

On Some Arrangements of Figures

by Umojiro Miura.

## はじめに

ある日のNHK教育テレビで次のような場面があった。『1から6までの6この数字を三角形に並べて、3つの辺の上の数の和を等しくするには、どのように並べたらよいか』という問題で、それは何回かの試行錯誤の結果正解にたどりつくという指導であった。そこで、このような簡単な問題のうちに、どのような数理が見出されるだろうか、又学校数学の問題としてどのような意味が見出されるだろうか、を考えてみようというのがこの小論の狙いである。

## § 1. 三角形に配列すること

**問1**  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  の6この数字で三角形をつくり、各辺の上の数の和を等しくせよ。

そのような配列ができたとし、全体集合  $S$  の和を  $\sigma$ 、頂点におかれた数の集合を  $A$ 、その数の和を  $\alpha$ 、その他の数の集合を  $B$ 、その数の和を  $\beta$ 、等しくされた1辺の上の数の和を  $k$  とすると（以後、これらの記号はこの意味で用いる。）次のような関係式が得られる。

$$\sigma = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$6 \leq \alpha \leq 15 \dots\dots\dots ①$$

$$3k = 2\alpha + \beta = \alpha + \sigma = \alpha + 21$$

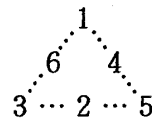
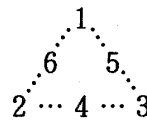
$$k = \frac{\alpha}{3} + 7 \dots\dots\dots ②$$

①, ②から、次の表が得られる。

$\alpha$	6	9	12	15
$k$	9	10	11	12

これらの場合はすべて、  
(図1) のように可能である。

$$\begin{array}{ll} \alpha=6 & A=\{1, 2, 3\} \\ k=9 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \alpha=9 & A=\{1, 3, 5\} \\ k=10 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} \alpha=12 & A=\{2, 4, 6\} \\ k=11 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \alpha=15 & A=\{4, 5, 6\} \\ k=12 \end{array}$$

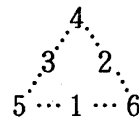
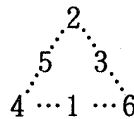


図1.

ある配列が所求の性質をもてば反対の向きの配列も亦所求の性質をもつので、以後、一つの向きの配列のみを考察することにする。

**問2**  $S = \{1, 2, \dots, 9\}$  の9この数字で三角形をつくり、各辺の上の数の和を等しくせよ。

問1の場合と同様に次のような関係式と表が得られる。

$$\sigma = 1 + 2 + \dots + 9 = 45$$

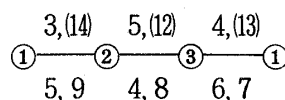
$$6 \leq \alpha \leq 24 \quad k = \frac{\alpha}{3} + 15$$

$\alpha$	6	9	12	15	18	21	24
$k$	17	18	19	20	21	22	23

これら7この場合がすべて可能であろうか。

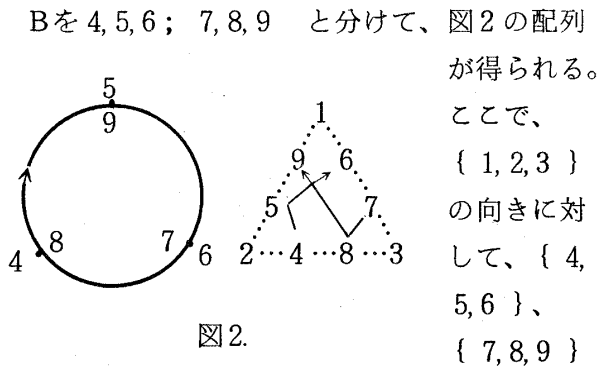
Ⅰ  $\alpha = 6, k = 17, A = \{1, 2, 3\}$  の場合

以後、考察の過程を示すために次のような図を用いることがある。図は三角形の辺を開いた



もの、○は頂点、○の中の数字はその点におかれた数字、線

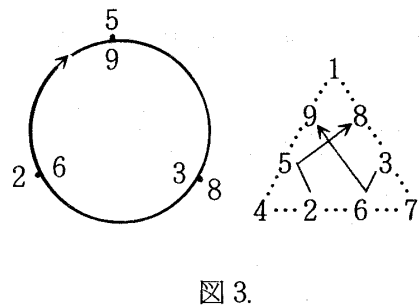
分の上の2つの数字のうち、左のものは、その辺のの両端におかれた数の和、( )内の数字は、その左の数との和が $k$ になるような数である。そしてこれらを $k$ に対する辺の数の補数という。例えば14は3の( $k=17$ に対する)補数。線分の下2つづつの数は、Bの中でその和が、3, 5, 4の補数になるようにえらんだものである。それらは $B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ から下のようにして得られる。



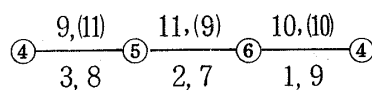
の向きは反対であることを注意しておく。

②  $\alpha=9$ ,  $k=18$ の場合は不可能。

③  $\alpha=12$ ,  $k=19$ の場合  $A=\{1, 4, 7\}$ として図3の配列が得られる。ここでも

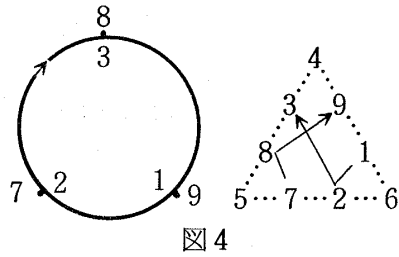


④  $\alpha=15$ ,  $k=20$ ,  $A=\{4, 5, 6\}$ の場合



配列は図4のようになる。 $\{4, 5, 6\}$ の向きに対して、 $\{7, 8, 9\}$

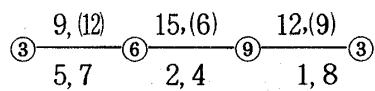
Bを1, 2, 3; 7, 8, 9 と分けて



と $\{1, 2, 3\}$ の向きが反対であることの他に、3つの円順列の順序を $\{4, 5, 6\}$ 、

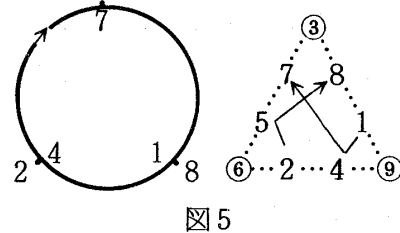
$\{7, 8, 9\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ と見るとよいと思われる。これは、それぞれの第1項のつくる円順列 $\{4, 7, 1\}$ の順序である。

⑤  $\alpha=18$ ,  $k=21$ ,  $A=\{3, 6, 9\}$ の場合



配列は図5のようになる。

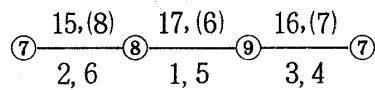
Bを2, 5, 8; 1, 4, 7 と2つに分けて



$\{3, 6, 9\}$ ,  $\{2, 5, 8\}$ ,  $\{1, 4, 7\}$ の向きについては今までの場合と同様。

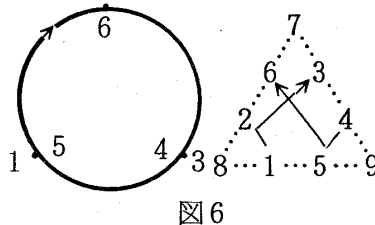
⑥  $\alpha=21$ ,  $k=22$ , は不可能。

⑦  $\alpha=24$ ,  $k=23$ ,  $A=\{7, 8, 9\}$ の場合



配列は図6のようになる。

Bを1, 2, 3; 4, 5, 6 と2つに分けて



$\{7, 8, 9\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{4, 5, 6\}$ の向きについては他の場合と同様。

以上しらべたことをまとめると問2の結論は次の表1のようになる。

$\alpha$	6	9	12	15	18	21	24
$k$	17	18	19	20	21	22	23
	○	×	○	○	○	×	○

表1

○: 可能

×: 不可能

以上の考察から、次のような法則が得られる。

公差  $\delta > 0$  の 3 つの等差数列  $\{a_1, a_2, a_3\}$

$\{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\}$  を図 7 のように配列すると、各辺の上の数の和は等しくなる。

(法則 1)

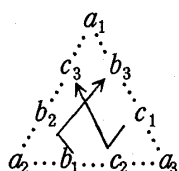


図 7

$$a_1 + a_2 + b_2 + c_3 = 2a_1 + b_1 + c_1 + 4\delta$$

$$a_2 + a_3 + b_1 + c_2 = 2a_1 + b_1 + c_1 + 4\delta$$

$$a_3 + a_1 + b_3 + c_1 = 2a_1 + b_1 + c_1 + 4\delta$$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  について、この法則を適用してみよう。S を公差の等しい 3 つの等差数列に分けると次のようになる。

(1)  $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}$

(2)  $\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}$

(1) から

(2) から

A	$\alpha$	k	A	$\alpha$	k
$\{1, 2, 3\}$	6	17	$\{1, 4, 7\}$	12	19
$\{4, 5, 6\}$	15	20	$\{2, 5, 8\}$	15	20
$\{7, 8, 9\}$	24	23	$\{3, 6, 9\}$	18	21

表 1 に示された可能な場合はすべて、ここに表われている。

1 辺における数字の個数を  $m$  とすると、 $m=3$ ,  $m=4$  の場合を考察したことになるが、後で配列を分類するために、次のように定義しておく。

$m=3$  の場合を基本第 1 型の配列という。

$m=4$  の場合を基本第 2 型の配列という。

問 3  $m=5$  のときはどのように配列すればよいか

$S = \{1, 2, \dots, 12\}$  について考えてみる。まず  $\{1, 2, \dots, 6\}$  をとって、問 1 の方法で、基本第 1 型の配列をつくる。次に残りの  $\{7, \dots, 12\}$  から 2 つずつの和が等しい組合せを 3 つ作って、それぞれの組を 1 つずつ辺の上におけばよい。 $\{7, 12\}, \{8, 11\}, \{9, 10\}$  をどの辺の上においてもよい。1 例を図 8 に示す。

この問題は次のように一般化することができる。

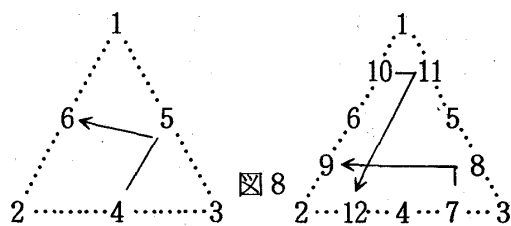


図 8

公差  $\delta_1 > 0$  の 2 つの数列  $\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}$

公差  $\delta_2 > 0$  の 2 つの数列  $\{c_1, c_2, c_3\}, \{d_1, d_2, d_3\}$

をとって、図 9 のように配列すると、各辺の上の数の和は等しくなる。(法則 2)

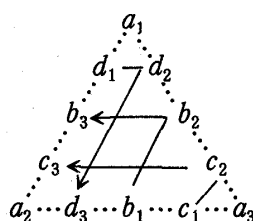


図 9

$$a_1 + a_2 + b_3 + c_3 + d_1 = 2a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + 3\delta_1 + 2\delta_2$$

$$a_2 + a_3 + b_1 + c_1 + d_3 = 2a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + 3\delta_1 + 2\delta_2$$

$$a_3 + a_1 + b_2 + c_2 + d_2 = 2a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + 3\delta_1 + 2\delta_2$$

$S = \{1, 2, \dots, 12\}$  の配列にこの法則 2 を適用してみよう。S の分け方は次の通り。

(1)  $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10, 11, 12\}$

(2)  $\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{7, 9, 11\}, \{8, 10, 12\}$

(3)  $\{1, 6, 11\}, \{2, 7, 12\}, \{3, 4, 5\}, \{8, 9, 10\}$

(4)  $\{1, 5, 9\}, \{2, 6, 10\}, \{3, 7, 11\}, \{4, 8, 12\}$

(1)からは  $\alpha = 6, 15, 24, 33$  の配列

(2)からは  $\alpha = 9, 12, 27, 30$  の配列

(3)からは  $\alpha = 18, 21, 12, 27$  の配列

(4)からは  $\alpha = 15, 18, 21, 24$  の配列

又  $m=5$  で考えられる配列は

$$\sigma = 1 + 2 + \dots + 12 = 6 \times 13$$

$$k = \frac{\alpha}{3} + 26 \text{ より}$$

$$6 \leq \alpha \leq 33, 28 \leq k \leq 37$$

これらのすべての配列が可能であることが明らかにされた。

以上、 $m=3, 4, 5$  の場合の配列を考察してきたが、問題解決の鍵は次の等差数列の性質に在るように思われる。

- (1) 公差  $\delta$  の数列  $a_1, a_2, a_3$  を三角形の頂点におくと、2つずつの和  $a_2 + a_1$ ,  $a_1 + a_3$ ,  $a_3 + a_2$  は、 $a_1, a_2, a_3$  と反対の向きで、公差  $\delta$  の数列となる。
- (2) 公差  $\delta$  の2つの数列、 $a_1, a_2, a_3$  と  $b_1, b_2, b_3$  が同じ円周上に在るとき…図10

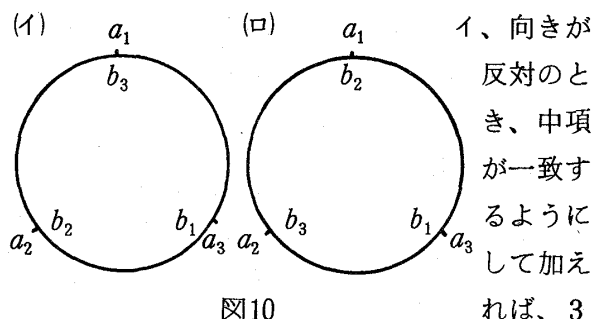


図10

項の和は等しくなる。

ロ、向きが同じとき、図10ロのように、1つづらして対応させて加えれば、向きが変わるが、公差は変わらず、 $\delta$  の数列になる。

(イ、を第1操作 ロ、を第2操作と呼ぶことにする。)

以上の考察から  $m$  が5より大きい奇数の場合は  $m=5$  と同様に処理することができることが明らかである。よって、 $m$  が奇数の場合を『第1型の配列』と定義しておく。特に  $m=3$  のときが『基本第1型の配列』である。

**問4**  $m$  が6以上の偶数のときはどのように配列すればよいか。

$S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$  として  $m=6$  の場合を考えよう。 $m=5$  の場合にならって、 $S$  から  $\{1, 2, \dots, 9\}$  をとって、基本第2型をつくる。次に残りの  $\{10, \dots, 15\}$  を2つに分けて、 $10, 11, 12; 13, 14, 15$  とし、これに第1操作を考えて、各辺上におけばよい。……図11。

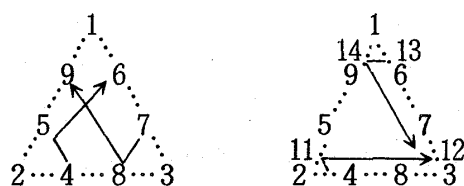


図11

$S$  を項数3の等差数列に分けると次のようになる。

- (1)  $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10, 11, 12\}, \{13, 14, 15\}$
- (2)  $\{3, 4, 5\}, \{8, 9, 10\}, \{13, 14, 15\}, \{1, 6, 11\}, \{2, 7, 12\}$
- (3)  $\{1, 2, 3\}, \{6, 7, 8\}, \{11, 12, 13\}, \{4, 9, 14\}, \{5, 10, 15\}$
- (4)  $\{1, 3, 5\}, \{6, 8, 10\}, \{11, 13, 15\}, \{2, 7, 12\}, \{4, 9, 14\}$

(1)では、どの3つをとっても、基本第2型をつくることができるが、(2)、(3)、(4)では初めにある。3つだけのときに基本第2型をつくることができる。

$S = \{1, 2, \dots, 15\}$  でできる  $m=6$  の配列はいく通りあり得るか。

$$\sigma = 1 + 2 + \dots + 15 = 15 \times 8$$

$$k = \frac{\alpha}{3} + 40 \quad 6 \leq \alpha \leq 42 \quad \text{より}$$

$$42 \leq k \leq 54$$

このうち、不可能なのは次の2つだけである。

$$\alpha = 18, \quad k = 46, \quad \alpha = 30, \quad k = 50$$

$m$  が6以上の偶数のときは  $m=4$  の基本第2型から始めて、上のようにして配列することができるので、これらを『第2型の配列』と定義しよう。

## § 2. 多角形に配列すること

三角形に配列することは一応考察を終えたので、問題を多角形の場合に拡張してみよう。まづ四角形の場合をとりあげる。 $S = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$  による基本第1型を考える。

$$\sigma = 1 + 2 + \dots + 8 = 36$$

$$k = \frac{\alpha}{4} + 9, \quad 10 \leq \alpha \leq 26 \quad \text{より}$$

$\alpha$	12	16	20	24
$k$	12	13	14	15

図12に示すようにこれらはすべて可能であるが、三角形の場合とちがって、そこには法則らしいものを見出せない。

1...5...6	1...4...8	1...6...7	3...5...7
8	4	7	3
3...7...2	5...6...2	8...2...4	8...1...6

図12

次に  $S = \{1, 2, \dots, 12\}$  による基本第2型を考える。

$$\sigma = 1 + 2 + \dots + 12 = 78$$

$$k = \frac{\alpha + 78}{4} \quad 10 \leq \alpha \leq 42 \quad \text{より}$$

$\alpha$	10	14	18	22	26	30	34	38	42
$k$	22	23	24	25	26	27	28	29	30

$$\alpha = 10 \quad A = \{1, 2, 3, 4\} \quad k = 22$$

$$\alpha = 14 \quad A = \{1, 2, 4, 7\} \quad k = 23$$

の配列を図13に示しておくが、基本第1型と同様に法則性が見出されないので、これ以上は試みないことにする。

1...11...6...4	1...11...6...4
9	8
10	7
2...5...12...3	3...5...12...2

1...10...5...7	1...3...11...7
8	8
12	10
2...6...11...4	4...6...11...2

図13

次に5角形に配列することを考える。

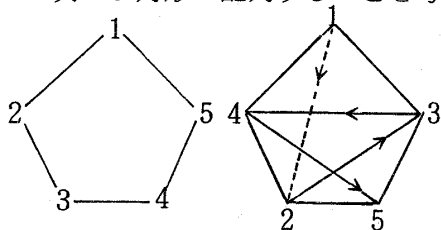


図14

図14のように5角形の頂点に、1, 2, 3, 4, 5, をおいて、各辺の上の

2数を加えると、3, 5, 7, 9, 6 となって、最後のところで等差性が失われる点が三角形の配列と異なる点である。三角形の配列ではこのことは重要な意味をもっている。そこで、図14のように、頂点を一つおきにとって数をおいて、各辺の上の2数を加えてみると、意外にも、4, 5, 6, 7, 8, と等差数列が得られる。更に7角形についてしらべると、図15に示すように5, 6, 7, 8,

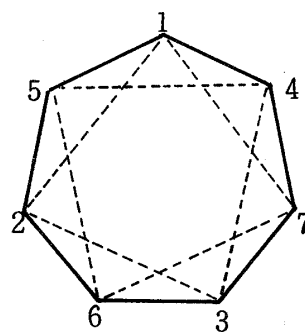


図15

9, 10, 11, と等差数列が得られる。いずれの場合も初項は1を左端とする辺の上の和で、数列の向きは1, 2, 3, ...の向きと同じであることが分る。このことは奇数

辺数の多角形について重要な性質なので、次にその証明をしておく。

【定理】  $n$  を5以上の奇数とするとき、自然数  $1, 2, 3, \dots, n$  を  $n$  角形の頂点に、ある点から始めて順に1つおきに置いていくと、各辺の上の2数の和も亦  $n$  の隣接した自然数となる。従ってこのことは一般の項数  $n$  の等差数列についても成り立つ。

証明は次の表2を見れば明らかであろう。

なお、この定理は実は  $n=3$  のときにも成り立っていたのであった。

頂点の番号、 対応する数	辺の番号、辺上の2数の和
1..... 1	$1 \dots 1 + \frac{n+3}{2} = \frac{n+5}{2}$
2..... $\frac{n+3}{2}$	$2 \dots \frac{n+3}{2} + 2 = \frac{n+7}{2}$
3..... 2	$3 \dots 2 + \frac{n+5}{2} = \frac{n+9}{2}$
4..... $\frac{n+5}{2}$	$4 \dots \frac{n+5}{2} + 3 = \frac{n+11}{2}$
5..... 3	

$n-2 \dots \frac{n-1}{2}$	$n-2 \dots \frac{n-1}{2} + n = \frac{3n-1}{2}$
$n-1 \dots n$	$n-1 \dots n + \frac{n+1}{2} = \frac{3n+1}{2}$
$n \dots \frac{n+1}{2}$	$n \dots \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n+3}{2}$
$1 \dots 1$	

表2

この定理から、辺数が奇数の多角形における基本第1型の配列は簡単な方法でできる。5角形の場合を例としてあげておく。

$S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ として

$\sigma = 1 + 2 + \dots + 10 = 55$

$k = \frac{\alpha}{5} + 11 \quad 15 \leq \alpha \leq 40 \quad \text{①より}$

$14 \leq k \leq 19$

$S$ を2つの等差数列に分けると

(1)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ と $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

(2)  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ と $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(1)から  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\alpha = 15$

$A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $\alpha = 40$

(2)から  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $\alpha = 25$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $\alpha = 30$

$\alpha$ に対応する $k$ の値は ①から

$\alpha$	15	20	25	30	35	40	
$k$	14	15	16	17	18	19	○…可能 ×…不可能
	○	×	○	○	×	○	

$k=14$ の場合だけ示しておく。

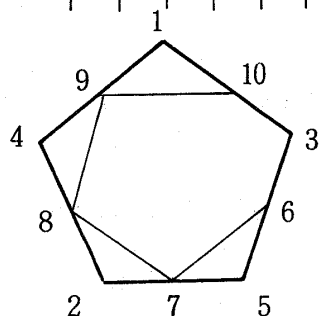


図16

$m = 5, 7, 9, \dots$ の奇数の場合については三角形の場合と同様なので、これらの配列を5角形、7角形等の『第1型の配列』と定義しておく。

次に5角形における基本第2型を考える。項数5の等差数列では、項数3のときのようには

「第2操作」ができない。このことが、5角形の基本第2型の考察をむづかしくする所以であろう。

いま、公差 $\delta$ の2つの数列  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  と  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  が与えられたとする。これから各から1つずつとって作った。対の和が公差 $\delta$ の数列をなすようにしたい。下のよう

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  2つずらして、上、下の

$c_3, c_4, c_5, c_1, c_2$  和をみると、次のような

公差 $\delta$ の数列が得られる。

$b_1 + c_3, b_4 + c_1, b_2 + c_4, b_5 + c_2, b_3 + c_5$

数字の和、4, 5, 6, 7, 8を見ればよいことは容易に分かる。

このことから次のような配列の方法が見出される。

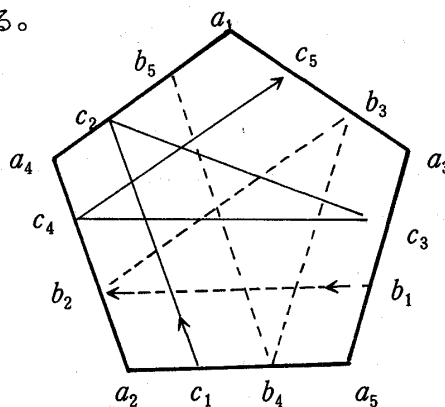


図17において 図17

$$a_1 + b_5 + c_2 + a_4 = 2a_1 + b_1 + c_1 + 8\delta$$

$$a_4 + c_4 + b_2 + a_2 = 2a_1 + b_1 + c_1 + 8\delta$$

$$a_2 + c_1 + b_4 + a_5 = 2a_1 + b_1 + c_1 + 8\delta$$

$$a_5 + b_1 + c_3 + a_3 = 2a_1 + b_1 + c_1 + 8\delta$$

$$a_3 + b_3 + c_5 + a_1 = 2a_1 + b_1 + c_1 + 8\delta$$

この方法の正しいことが証明された。

$S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ についてこの配列をしらべてみよう。

$\sigma = 1 + 2 + 3 + \dots + 15 = 120$

$k = \frac{\alpha}{5} + 24 \quad 15 \leq \alpha \leq 65 \quad \text{より}$

$27 \leq k \leq 37$

$\alpha$	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	
$k$	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	○:可能 ×:不可能
	○	×	×	×	○	○	○	×	×	×	○	

Sを3つの等差数列に分けると、

- (1)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}$   
 $\{11, 12, 13, 14, 15\}$   
 (2)  $\{1, 4, 7, 10, 13\}, \{2, 5, 8, 11, 14\},$   
 $\{3, 6, 9, 12, 15\}$

これから次のような配列ができる。

(1)から	A	$\alpha$	k
	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	15	27
	$\{6, 7, 8, 9, 10\}$	40	32
	$\{11, 12, 13, 14, 15\}$	65	37
(2)から	$\{1, 4, 7, 10, 13\}$	35	31
	$\{2, 5, 8, 11, 14\}$	40	32
	$\{3, 6, 9, 12, 15\}$	45	33

次に7角形について、基本第1型及び基本第2型の配列の例を1つずつ示し、一般の第1型、第2型、の配列は省略する。

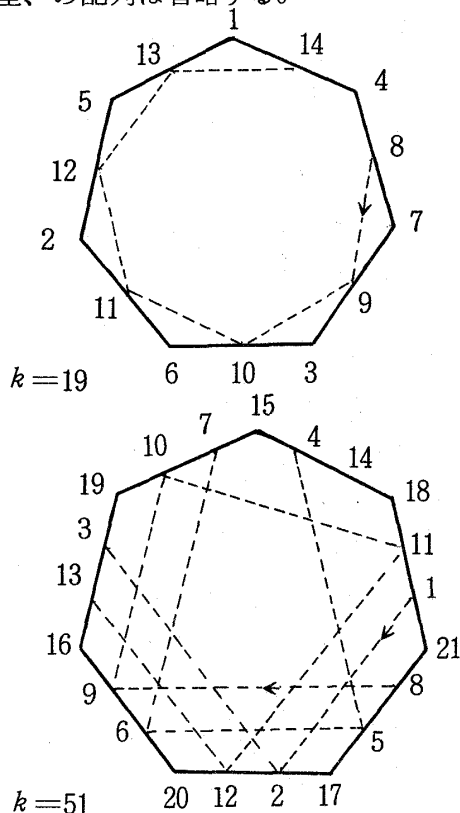


図18

いままで考察してきた問題は次のように見なおすことができる。

円周を  $n$  ( $\geq 3$ ) の弧に分け、分点及び各弧の上に同数の数をおき、弧上の数(両端の数

も入れて) の和を等しくすること。但しおかれる数は、 $1, 2, 3, \dots$  とつづいた自然数とする。(一般的な等差数列としてもよい。)

分点を除いた弧上の数の個数が奇数のときが、第1型、偶数のときが、第2型である。

このように見なおすと又新しい問題が出てくる。 $n=2$  の場合は直線図形ではなかった問題であるが、円周とすると考えられる問題である。そして、第1型は不可能、第2型のある場合が可能であることが証明できる。

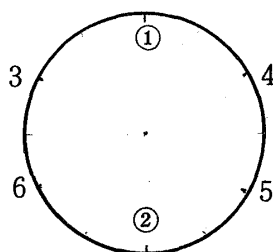


図19

図19から容易に分るように、 $4m+2$  のつづいた自然数(又は等差数列)のときのみ配列可能である。

### § 3. 多面体の上の配列について

$n$  辺形の辺の上の配列についての考察を一応終えたので問題を多面体の上に拡張してみよう。まず最も簡単な四面体を取りあげる。多角形の場合の自然の発展として、四面体の4つの頂点と6つの辺の上に数をおく問題も考えられるが、観点を変えて、辺上におく数を三角形の内部において、各面上の数の和を等しくする問題を考察することにする。

問1  $S = \{1, 2, \dots, 8\}$  の数を四面体の各頂点及び四面体の内部に一つずつおいて、各面上の数の和を等しくせよ。

条件を満足するような配列ができたとする。頂点におかれた数の集合を  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 、三角形の内部におかれた数の集合を  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  頂点  $a_i$  に対する面の数を  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) とし、これを図のように展開図で示す。

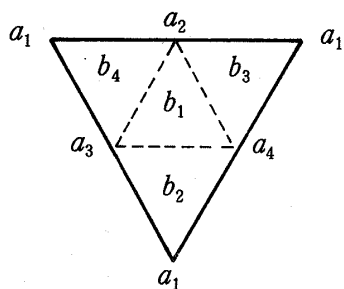


図20

Aの数の和を  
 $\alpha$ , Bの数の和  
を $\beta$ , 各面の数  
の和を $k$ とする  
と、次のような  
関係式が得られ  
る。

$$\alpha = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad B = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

$$\alpha + \beta = 36$$

$$b + (a_2 + a_3 + a_4) = k \text{ より}$$

$$b_1 + \alpha = k + a_1$$

従って  $(i = 1, 2, 3, 4)$

$$b_i = a_i + (k - \alpha) \quad \text{又は} \quad b_i - a_i = k - \alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

①は  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  の一方  
が公差  $\delta$  の等差数列をなせば、他方も亦公差  $\delta$   
の等差数列をなすこと、又等差数列をなさない  
としても、対応する数の差は相等しいことを示  
している。

又①から

$$\begin{aligned} b_2 + b_3 + b_4 &= a_2 + a_3 + a_4 + 3(k - \alpha) \\ &= 3k + (\alpha - a_1) - 3\alpha \\ &= 3k - 2\alpha - a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + (b_2 + b_3 + b_4) &= 3k - 2\alpha \\ \text{同様に} \quad a_2 + (b_3 + b_4 + b_1) &= 3k - 2\alpha \\ a_3 + (b_4 + b_1 + b_2) &= 3k - 2\alpha \\ a_4 + (b_1 + b_2 + b_3) &= 3k - 2\alpha \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

②は、頂点の数と対応する面の数とを入れ代  
えたものも亦条件に適する配列であることを示  
している。このような配列を『共役な配列』と  
呼ぶことにする。

$S = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$  の分け方について

(1)等差数列になる場合

$$\{1, 2, 3, 4\} \text{ と } \{5, 6, 7, 8\}$$

$$\{1, 3, 5, 7\} \text{ と } \{2, 4, 6, 8\}$$

(2)等差数列でない場合

$$\{1, 2, 5, 6\} \text{ と } \{3, 4, 7, 8\}$$

(1)から

A	$\alpha$	
$\{1, 2, 3, 4\}$	10	} 共役
$\{5, 6, 7, 8\}$	26	
$\{1, 3, 5, 7\}$	16	} 共役
$\{2, 4, 6, 8\}$	20	

(2)から

$\{1, 2, 5, 6\}$	14	} 共役
$\{3, 4, 7, 8\}$	22	

(1),(2)から1つずつ図示しておく。

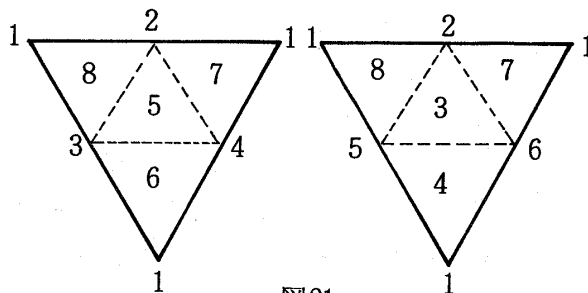


図21

次にこのような配列はいく通り考えられる  
かをしらべてみよう。

$$\begin{aligned} 4k &= 3\alpha + \beta = 2\alpha + (\alpha + \beta) \\ &= 2\alpha + 36 \quad \text{より} \\ k &= \frac{\alpha}{2} + 9 \quad \text{より } 14 \leq k \leq 22 \\ 10 &\leq \alpha \leq 26 \end{aligned}$$

$\alpha, k$  の対応表をつくると

$\alpha$	10	12	14	16	18	20	22	24	26	
$k$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	○: 可能
	○	×	○	○	×	○	○	×	○	×

この配列を四面体における基本第1型とし  
て、一般の第1型の配列を考えることは平面  
のときの配列と同様なので省略する。

次に四面体の基本第2型の配列はどうか。  
これは不可能のようである。多角形の場合と  
異なり、多面体では、四面体上の第1型の配  
列だけで、他の多面体では不可能のようであ  
る。



## おわりに

かくして、『1 から 6 までの 6 この数字で三角形をつくり、各辺上の数の和を等しくする』という極めて簡単な問題のうちにひそむ数理を追って、つぎつぎと考察を発展させていったあとを、余り整理しないでそのままを述べてきた。従って始めのところから通読すると体裁の整ったものになっていない。しかし学校数学の対象としての考察にはこのままの方がよいだろうと考えて、あえて、余り整理しないで発表することにした。

この種の数の配列の問題には、古来、魔方陣その他いろいろなものがあるが、その多くは学校数学でとりあげるには適切でないように思われる。この小論でとりあげた問題は、ごく簡単な場合から始めて、次第に複雑な場合に、時には帰納的に又は演繹的に、一般化したり、拡張したり、発展的、統合的にとり扱うことができるということから、学校数学の対象としてとりあげると面白い問題になるように思われる。どのように教材化したらよいかの具体的な研究はこれからの課題である。