

となるから

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (32)$$

という関係が成立する。まとめると、

○発散を無視し十分長い金属棒を考えた場合、同じ時間、同温度で熱すると熱源から同温度になる距離は金属棒の温度伝導率の平方根に比例する。したがって温度伝導率の平方根の値のなれたものを使用すれば“金属によって熱の伝わり方が異なる”という事を実験的に明らかにするのに役立つものと考えられる。

○熱源を共に一定温度に保つと共に各材料の熱源を恒温槽を利用するかして均一にするよう心がける事が大切である。これは次の事項とも関連がある。

○熱方程式の解は熱源が一定温度の場合には比較的簡単である。ところが熱源を指数関数的に上昇させた場合には解の中に指数関数を含み解に影響を与える結果になりひいては伝わる速度に関係してくる。それゆえできるだけ複雑な熱源にしない方が比較も容易になりよい結果をうるものと考えられる。

3、おわりに

小学校6年“熱の伝わり方”に関して定常状態でも過渡状態でも熱源の状態により大きく温度分布が異なってくる。さらに実験材料にどの金属材料とどの材料を比較実験したら顕著な結果が得られるか指導者は吟味して選択しなければならない。基本的な性質を考えたうえで実験材料、方法を選択しなければならない。最後にこの研究に際して適切な御助言をいただいた千葉大学工学部助教授美多勉氏に深く感謝いたします。また日頃討論いただいた千葉敬愛短期大学堀田和弘、井上清両教授に感謝いたします。

4、要 約

小学校教材“金属棒を伝わる熱”に関して“定常状態”において金属棒と周囲との温度差

は一般的に指数関数的になると考えられていた。しかし金属棒の長さが有限であって、半径、長さ、熱伝導率、発散率、および両端の温度により指数関数的分布になるための条件が微分方程式を解く事により明らかになったのでここで報告する。さらに2, 3の実験に対しての注意や関係式を与える。次に熱伝導に関する偏微分方程式を解く事により温度伝導率が主に熱を伝える速度に関係している事を示すとともに、実験材料の選び方にもふれ注意を与える。

5、参考文献

- 1) 佐藤瑞穂：物理学演習上巻, P 210 ~ P 211, 培風館
- 2) 文部省：小学校指導書, 理科編 P 100 ~ P 101, 大日本図書
- 3) 田中昭夫：金属棒の熱伝導について, 日本理科教育学会, VOL: 22 No 1 (1981)
- 4) 伊神大四郎：自然科学, P 37 ~ P 38, 協同出版
- 5) 松村英之訳：ミクシンスキー演算子法, 裳華房
- 6) 松浦省三 共著：応用数学例題演習, P 211 ~ P 212, コロナ社
- 7) 堀田和弘 共著：理科教育の研究, P 252, 建帛社

2、過度状態における温度分布

小学校の実験では熱伝導装置としてインゲンハウスの熱実験器や 그레이の方法が用いられている。本節では熱伝導方程式をラプラス変換を用いて解くことにより実験に対する基本的考え方、および実験に対する注意を指摘したい。一般に発散を無視した場合の熱伝導方程式は、

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (19)$$

となる。ただし k は熱伝導率、 ρ は密度、ならびに c は比熱である。(19)式の偏微分方程式を解く方法には、演算子法、解を時間関数と距離に対する関数の積と仮定して解く方法、などが考えられているが、ここではラプラス変換による方法を用いる。ラプラス変換を用いれば1つの変数を消す事ができ(19)式の方程式は常微分方程式に帰着でき、解が比較的簡単に求まるので採用した。最初に境界条件を次の様に定める。

$$\theta = \theta_R \quad (t=0, \quad x > 0) \quad (20 \cdot 1)$$

$$\theta = \theta_t \quad (x=0, \quad t > 0) \quad (20 \cdot 2)$$

$$\theta = \text{有限} \quad (x \rightarrow \infty, \quad t > 0) \quad (20 \cdot 3)$$

(20・1)式は棒の全体が $t=0$ において室温 θ_R になっており (20・2)式は金属棒の $x=0$ の所を θ_t °C一定としてあたため続けるという意味である。(20・3)式は $x \rightarrow \infty$ で温度は無限度の温度にはなり得ないという意味である。

(20・2)式を考慮しラプラス変換を行なうと

$$S\theta(x, s) - \theta_R = \alpha^2 \frac{d^2 \theta(x, s)}{dx^2} \quad (21)$$

となるから変形すると

$$\frac{d^2 \theta(x, s)}{dx^2} - \frac{S}{\alpha^2} \theta(x, s) = -\frac{\theta_R}{\alpha^2} \quad (22)$$

となる。ただし $\alpha = \sqrt{\frac{k}{\rho c}}$ である。 $x=0$ のとき (20・2)式から

$$\theta(0, s) = \frac{\theta_t}{s} \quad (23)$$

となり(22)式から

$$\theta(x, s) = C_1 \exp\left(\frac{-x\sqrt{s}}{\alpha}\right) + C_2 \exp$$

$$\left(\frac{x\sqrt{s}}{\alpha}\right) + \frac{\theta_R}{s} \quad (24)$$

(24)式の C_1, C_2 は任意定数なので具体的に求めると以下ようになる。(20・3)式の条件から(24)式の第2項は消えて

$$\theta(x, s) = C_1 \exp\left(\frac{-x\sqrt{s}}{\alpha}\right) + \frac{\theta_R}{s} \quad (25)$$

となり $x=0$ の時(23)式、(25)式は等しくなければならない。したがって

$$C_1 + \frac{\theta_R}{s} = \frac{\theta_t}{s} \quad (26)$$

となる。(26)式より C_1 は

$$C = -\frac{\theta_R}{s} + \frac{\theta_t}{s} \quad (27)$$

として求める。(27)式を(25)式に代入すれば

$$\theta(x, s) = \frac{\theta_R}{s} \left[1 - \exp\left(\frac{-x\sqrt{s}}{\alpha}\right)\right] + \frac{\theta_t}{s} \exp\left(\frac{-x\sqrt{s}}{\alpha}\right) \quad (28)$$

が求まる。最後に(28)式を逆ラプラス変換すれば解は求まるのであるがその前に

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s} \exp\left(\frac{-x\sqrt{s}}{\alpha}\right)\right] = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right) \quad (29)$$

の関係があることに注意して $\theta(x, t)$ を求める。ただし L^{-1} は逆ラプラス変換を $[\quad]$ にはほどこすという意味である。したがって次式が成立する。

$$\theta(x, t) = \theta_R \left[1 - \text{erfc}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right)\right] +$$

$$\theta_t \left[\text{erfc}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right)\right] = \theta_R \text{erf}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right) + \theta_t \text{erfc}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right) \quad (30)$$

(30)式における erf は誤差関数を表わし erfc は補誤差関数であり $\text{erfc} = 1 - \text{erf}$ の関係がある。一方の温度伝導率を α_1 、他方の温度伝導率を α_2 とすると境界条件、初期条件を等しいとして考えると同じ時間に同温となる距離の関係は(30)式を用いると

$$\frac{x_1}{2\alpha_1\sqrt{t}} = \frac{x_2}{2\alpha_2\sqrt{t}} \quad (31)$$

が出来ない。したがって実験の際には同じ半径、同じ長さの教材では両端の温度を同じに保ったとしても指数関数的温度分布になる材料とならない材料がある事がわかる。

〔例題 1〕

半径 0.5 cm、室温 15°C、熱源の温度 115°C、 $\theta_{xL} = 16^\circ\text{C}$ とし、Cu, Fe, Al の材料を使用した場合、温度分布が指数関数的になる最小の棒の長さを求めてみよう。

〔解〕 $S = \sqrt{\frac{2\epsilon}{k}}$ であるからまず Cu の場合を扱うと

$$k = 0.923, \epsilon = 3.0 \times 10^{-4} \text{ を代入して } S = 2.54 \times 10^{-2}$$

ここで(15)式に $r = 0.5 \text{ cm}$ 、室温、熱源の温度、 $x = L$ での温度を代入して L を求める。便宜上この長さを L_{cu} とする。すると、

$$-2.54 \times 10^{-2} \times \frac{L_{cu}}{\sqrt{0.5}} = \log_e \left(\frac{16-15}{115-10} \right)$$

が成り立つので

$$L_{cu} = \frac{4.6 \times 0.7 \times 10^2}{2.54} = 126 \text{ [cm]}$$

同様に Fe, Al を考えると

$$L_{Fe} = 57 \text{ [cm]}$$

$$L_{Al} = 104 \text{ [cm]}$$

この例題からわかるように金属棒の指数分布を決定する要素は熱源の温度、 $x = L$ での温度、室温、および各材料の熱伝導率、発散率でありただ単に棒の長さだけでは決定出来ない。もちろん半径の大きさも関係するのである事もわかる。

また(15)式から

$$L = -\sqrt{r} \log_e \left(\frac{\theta_{xL}}{\theta_{x0}} \right) \cdot \sqrt{\frac{k}{2\epsilon}} \quad (16)$$

を導くことが出来る。(16)式から次の事がいえる。

○同じ半径、両端の温度差を一定に保った場合温度分布が指数関数的分布になる棒の長さは

$$\sqrt{\frac{k}{2\epsilon}} \text{ に比例する。}$$

次に温度分布が指数関数的になった場合同じ温度になる距離の関係を求める。(12)式を利用し

2つの材料を考えると第1項だけを考えればよいので

$$\theta_{x0} \exp \left(-\sqrt{\frac{2\epsilon_1}{k_1}} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{r}} \right) = \theta_{x0} \exp \left(-\sqrt{\frac{2\epsilon_2}{k_2}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt{r}} \right) \quad (17)$$

が成立し

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{k_1}} \cdot x_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{k_2}} \cdot x_2 \quad (18)$$

となり、まとめると次の事が言える。

○2つの異なる材料を使用して指数関数的温度分布を持つ場合、同温になる距離の比は半径を同一とした場合 $\sqrt{\frac{\epsilon}{k}}$ に反比例する。

〔例題 2〕

室温と熱源との温度差 100 [°C] 一定とし、(15)式が成立する場合、Cu と Fe について両金属とも室温差 50 [°C] となる熱源との距離を求め(18)式が成り立つ事を考える。ただし Cu, Fe 共に棒の半径を 0.5 cm とする。

〔解〕 Cu の距離を x_1 , Fe の距離を x_2 [cm] とすると

$$\begin{aligned} \text{Cu の } K_1 \text{ は } K_1 &= \sqrt{\frac{2\epsilon_1}{k_1 r}} = \sqrt{\frac{2 \times 3.0 \times 10^{-4}}{0.923 \times 0.5}} \\ &= 3.6 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

同様に Fe では

$$\begin{aligned} K_2 &= \sqrt{\frac{2\epsilon_2}{k_2 r}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.7 \times 10^{-4}}{0.148 \times 0.5}} \\ &= 8.5 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

したがって(17)式を用いると

$$\text{Cu の場合: } 100 \exp(-K_1 x_1) = 50 \quad (a)$$

$$\text{Fe の場合: } 100 \exp(-K_2 x_2) = 50 \quad (b)$$

$$(a) \text{式から } x_1 = 19.4 \text{ [cm]}$$

$$x_2 = 8.2 \text{ [cm]}$$

この結果を用い(18)式を確かめると、左辺は

$$\sqrt{\frac{3.0 \times 10^{-4}}{0.923}} \cdot 19.4 \div 34.9 \times 10^{-2} \quad (c)$$

右辺は

$$\sqrt{\frac{2.7 \times 10^{-4}}{0.148}} \cdot 8.2 \div 35.0 \times 10^{-2} \quad (d)$$

(c), (d)より(18)式が確かめられた。

$$Q_2 = -k S_2 \left\{ \frac{d\theta}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{d\theta}{dx} \right) \Delta x \right\} \Delta t \quad (2)$$

となる。また周囲の温度 θ_R が θ よりさほど低くないとするとニュートンの冷却の法則から輻射によって失われる熱量は発散率を ε とすると、

$$Q_3 = \varepsilon \cdot 2\pi r (\theta - \theta_R) \Delta x \cdot \Delta t \quad (3)$$

となる。

$$Q_1 = Q_2 + Q_3, \quad S_1 = S_2 \quad (4)$$

であるから

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{2\varepsilon}{kr} (\theta - \theta_R) \quad (5)$$

となる。定数変化法を用いて解くと非同次の一般解は次式となる。

$$\theta = A \exp\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} x\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} x\right) + \theta_R \quad (6)$$

ここに A, B は任意定数である。棒の温度と室温との差は $\theta - \theta_R$ であるから

$$\theta - \theta_R = A \exp\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} x\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} x\right) \quad (7)$$

となり境界条件を考慮すると、(7)式から

$$A + B = \theta_{x_0} \quad (8)$$

$$A \exp\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} L\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} L\right) = \theta_{x_L} \quad (9)$$

が成立する。ただし θ_{x_0} は $x=0$ における棒の温度と室温との差であり θ_{x_L} は $x=L$ における棒の温度と室温との差である。(8)式、(9)式から A, B を求めると

$$A = \frac{\theta_{x_0} \exp\left(-\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} \cdot L\right)\right) - \theta_{x_L}}{\exp\left(-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} \cdot L\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} \cdot L\right)}$$

$$B = \frac{-\theta_{x_0} \exp\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} \cdot L\right) + \theta_{x_L}}{\exp\left(-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} \cdot L\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} \cdot L\right)} \quad (10)$$

となる。したがって境界値を考慮した時の解は $K = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}}$ とし、 x の場所の温度を $\theta(x)$ とすると

$$\theta(x) - \theta_R = \frac{\theta_{x_0} [\exp\{-K(L-x)\} - \exp\{K(L-x)\}]}{\exp(-KL) - \exp(KL)} + \frac{\theta_{x_L} \{ \exp(-Kx) - \exp(Kx) \}}{\exp(-KL) - \exp(KL)} \quad (11)$$

として求まる。(11)式を整理すると

$$\theta(x) - \theta_R = \theta_{x_0} \exp(-Kx) - \left\{ \frac{\exp(-Kx) - \exp(Kx)}{\exp(-KL) - \exp(KL)} \right\} \{ \theta_{x_0} \exp(-KL) - \theta_{x_L} \} \quad (12)$$

となる。従来(12)式は

$$\theta(x) - \theta_R = \theta_{x_0} \exp(-Kx) \quad (12-a)$$

として文献(3)では扱われていた。棒の長さが有限であることから考えても(12)式が正しい解であると考えられる。文献(3)と対応させて考えた場合、(12)式の第2項を $\theta_{x_0} \exp(-KL) - \theta_{x_L} = 0$ とおけば等しい式を求める事ができる。物理的には $\exp(-KL) \approx 0$ となり θ_{x_L} は室温とほとんど変わらない場合に相当する。正確に言えば全く等しい場合に当たる。ところで本研究では熱伝導率、半径、発散率、および長さ、境界値を考え $\theta_{x_0} \exp(-KL) - \theta_{x_L} = 0$ となり温度分布が指数関数で表わす事が出来る条件を考える事にする。(12)式において $0 \leq x \leq L$ であるから

$$\frac{\exp(-Kx) - \exp(Kx)}{\exp(-KL) - \exp(KL)} \leq 1 \quad (13)$$

が成立する。金属固有の性質をまとめて

$$\sqrt{\frac{2\varepsilon}{kr}} = S \quad \text{と} \quad \text{おいて条件を求めることにしよう。}$$

$$\theta_{x_0} \exp\left(-S \frac{L}{\sqrt{r}}\right) - \theta_{x_L} = 0 \quad (14)$$

とおくと

$$-S \frac{L}{\sqrt{r}} = \log_e \left(\frac{\theta_{x_L}}{\theta_{x_0}} \right) \quad (15)$$

となり、指数関数的温度分布を決定ずけるためには金属棒の両端の温度差と半径、長さの選択が必要になることがわかる。言い換えれば(15)式が成立しなければ指数関数的な温度分布にはならない。 S は金属固有の定数でそれは変える事

熱伝導に関する理論的一考察

田 口 功

A theoretical study on the Thermo-conduction

by Isao Taguchi

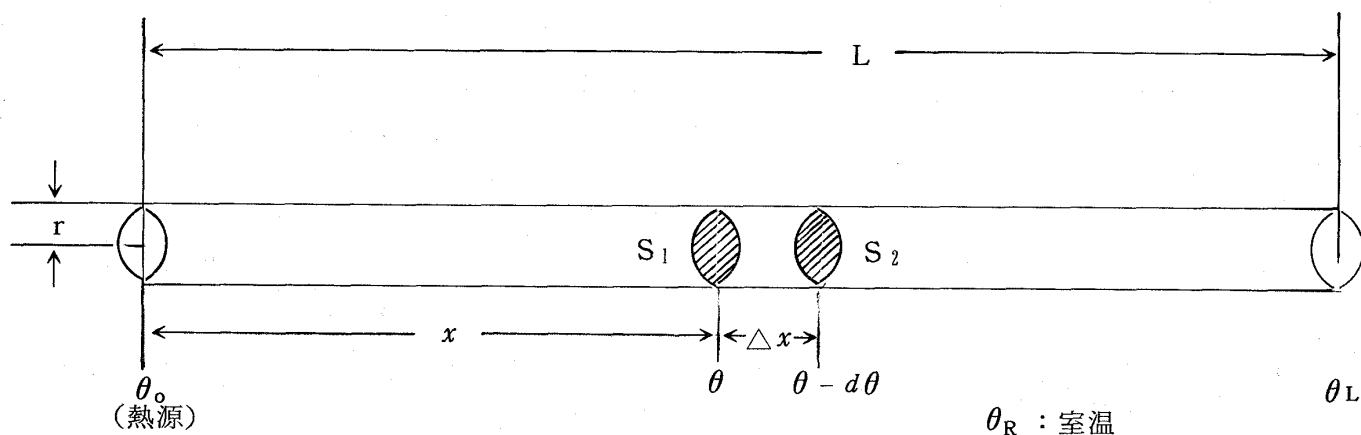
はじめに

小学校理科「熱の伝わり方」に関してとくに熱量の移動が時間的に変化しない場合、金属棒と周囲との温度差は熱源からの距離に対して指数関数的に減少すると考えられていた。しかし本研究では熱伝導率、発散率、特に金属棒の長さや半径、および金属棒の両端の温度が温度分布を決定することを示す。金属棒の半径を r 、長さを L 、発散率を ϵ 、熱伝導率を k 、両端の温度をそれぞれ θ_0 、 θ_L とした場合、 $-\sqrt{\frac{2\epsilon}{k}}$ 。

1、定常状態における温度分布

$\frac{L}{\sqrt{r}} = \log\left(\frac{\theta_L}{\theta_0}\right)$ の関係が成立している場合には指数関数的になる。そうでない場合は熱源から離れるにしたがって指数関数で近似すると誤差が大きくなる。それゆえ上述の関係が成り立つように実験装置を選択した場合指数関数的となり簡単な式で考えることができる。

次に金属棒を伝わる熱の時間的問題を、発散を無視し非常に長い棒をモデルとして考えた場合の一般式を与え種々の性質を導き、実験を効果的に行なうための注意を与える。



〔図1〕

図1に示すような試料を考える。熱源の温度を θ_0 。一定他端の温度を θ_L 一定、長さを L 、半径 r 、室温を θ_R とする。位置 x における等温面 S_1 の温度を θ 、位置 $x + \Delta x$ における等温面 S_2 の温度を $\theta - d\theta$ とすると、面 S_1 を通って

Δt 時間に流れ込む熱量は、熱伝導の公式から

$$Q_1 = -k S_1 \frac{d\theta}{dx} \Delta t \quad (1)$$

となり面 S_2 を通って Δt 時間に流れ出る熱量 Q_2 は