OS＝OR＋RS に(6)(7)(8)を代入して

$$= (a\cos\theta,\ b\sin\theta) + \frac{r}{\frac{b}{a}\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$$

$$\left(\frac{b^2}{a}\cos\theta,\ b\sin\theta\right) + r\left[-\cos\left\{\frac{S(\theta)}{r} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\right)\right\},\ \sin\left\{\frac{S(\theta)}{r} + \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right)\right\}\right]$$

$$\therefore\ x = a\cos\theta + \frac{b\,r\cos\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$$

$$- r\cos\left\{\frac{S(\theta)}{r} + \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right)\right\}$$

$$y = b\sin\theta + \frac{a\,r\sin\theta}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$$

$$- r\sin\left\{\frac{S(\theta)}{r} + \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right)\right\}$$

$b=a$ とおくと、P、5の円のときの x, y の座標を求めることが出来る。

あとがき

楕円についての解説は、余りなく且つ楕円積分の求め方も安易でないので、研究の効果があった。ただ楕円の図形を描くのが、容易でなかった。今後更に各種の曲線の解析的研究を続けたい。

参考文献

栗田　稔著　いろいろの曲線　共立社

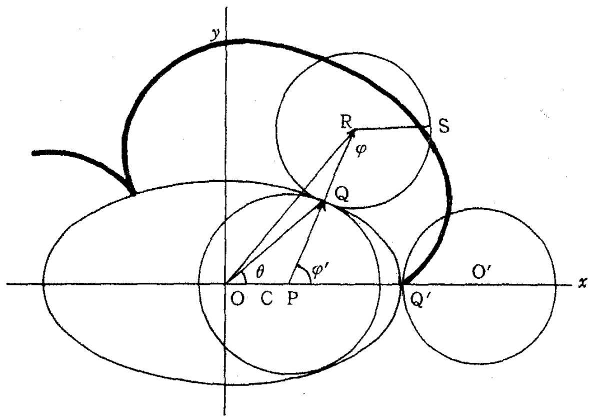
渡辺孫一郎著　微分積分　共立社

福田安易外3名著　微分積分演習　共立社

CRワイリー　富久泰明訳　Calculus　理工学海外名著シリーズ 3. 4

黒須康之助・小林　幹雄著　微分積分学　森北出版社

楕円の上の一点Q（$a\cos\theta$，$b\sin\theta$）に、内接する円を描き、又円の中心をx軸上の点



〔図6〕 Ellipse－Ⅱ

P（c，o）に取ると、

$(x-c)^2+y^2=(a\cos\theta-c)^2+(b\sin\theta)^2$

両辺をxで微分すると、

$2(x-c)+2y\dfrac{dy}{dx}=0 \quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y}(x-c)$ …… (2)

両辺xについて微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b}{a}\,\dfrac{x}{y}$ ……(3)

(2) (3) より

$$-\frac{1}{y}(x-c)=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

$C=(1-\dfrac{b^2}{a^2})=a\cos\theta-\dfrac{b^2}{a}\cos\theta$

$\overrightarrow{PQ}=a\cos\theta-(a\cos\theta-\dfrac{b^2}{a}\cos\theta)$，$b\sin\theta$

$=\dfrac{b}{a}\cos\theta$，$b\sin\theta$ ……(4)

$|\overrightarrow{PQ}|=\dfrac{b}{a}\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$ …… (5)

楕円の外側にころがす円の中心をR，半径rとして，今R円がQで楕円と接しているものとすると、P，Q，Rは一直線上にあるから、

$\overrightarrow{QR}=\dfrac{r}{|\overrightarrow{PQ}|}\overrightarrow{PQ}$。又$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}$であるから

$\overrightarrow{OR}=(a\cos\theta,\ b\sin\theta)+\dfrac{r}{\frac{b}{a}\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}$

$(\dfrac{b^2}{a}\cos\theta,\ b\sin\theta)$ ……(6)

〔図6〕に於いて、$\theta=0$のときQは、x軸上にあり回転円上の定点SはQ′に一致する。

O′円はすべらずに外接円がころがる故に、

$\overset{\frown}{QQ'}=\overset{\frown}{QS}$，$\overset{\frown}{QQ'}=S(\theta)$，$\angle QRS=\varphi$，とおく。

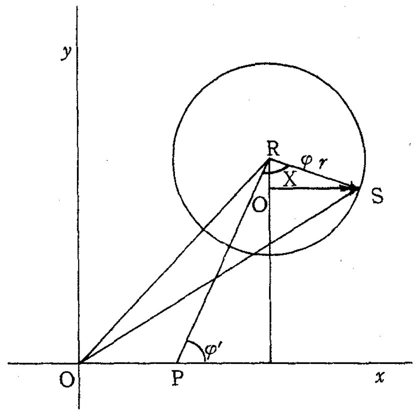
$\overset{\frown}{QS}=r$，$\varphi \quad \varphi=\dfrac{S(\theta)}{r}$…… (7)

$\angle QPQ'=\varphi'$ とおく。

(4)より

$$\tan\varphi'=\frac{b\sin\theta}{\frac{b^2}{a}\cos\theta}=\frac{a}{b}\tan\theta$$

$\therefore \varphi'=\tan^{-1}(\dfrac{a}{b})$ …… (8)



〔図7〕 Epllipse－Ⅲ

$\overrightarrow{RS}$について。図7のように、O＋X＝φとする。　X＝φ－O　又、O＝$\dfrac{\pi}{2}-\varphi'$

$\therefore X=-\dfrac{\pi}{2}+(\varphi+\varphi')$

$\overrightarrow{RS}$のx成分をRS_xとすれば、$RS_x>0$

$RS_x=r\sin\times$

$=r\sin\{-\dfrac{\pi}{2}+(\varphi+\varphi')\}$

$=-r\cos(\varphi+\varphi')$

(7)(8)より$=-r\cos\{\dfrac{S(\theta)}{r}+\tan^{-1}(\dfrac{a}{b}\tan\theta)\}$

$\overrightarrow{RS}$のy成分をRS_yとすれば、$RS_y<O$

$RS_y=-r\cos x=|-r\sin(\varphi+\varphi')$

$=-r\sin\{\dfrac{S(\theta)}{r}+\tan^{-1}(\dfrac{a}{b}\tan\theta)\}$

楕円に外接して円を回転したとき、円周上の一点の軌跡を求めるのであるから、S点の座標を求めればよい。

$$\therefore ds=\sqrt{r^2d\theta^2+dr^2}$$
$$=a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\ \ d\theta$$
$$=a\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\ d\theta$$
$$=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\ \ d\theta$$
$$=2a\cos\frac{\theta}{2}\ d\theta$$

前図　$\mathrm{ABC}=\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

$$=4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=4a$$

よって全長は $8a$ となる。

一般の場合 $r\neq a$ のときは $\frac{8r(a+r)}{a}$

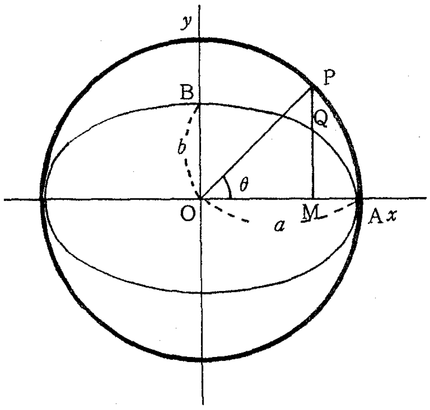
となる。

§ 3 . Ellipse

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の

(1) 媒介変数方程式

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$$



〔図 5〕 Ellipse － I

(2) 全長：S

Oから θ までの周の長さを $S(\theta)$、楕円上の一点Q（x, y）離心角の余角を θ とすれば、

$$S(\theta)=\int_0^{\theta}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}d\theta$$
$$=\int_0^{\theta}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\ \ d\theta$$

楕円の全長Sは第一象限の4倍なる故

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\ \ d\theta$$
$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\ell^2\sin^2\theta}\ \ d\theta \qquad \ell=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

この積分は第二種楕円積分と称し、初等函数にては表わすことが出来ない。二項定理を利用して無限級数に展開して、

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2+$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\{n-(n-1)\}}{1.\ 2.\ 3\cdots\cdots n}x^n$$
$$(1-\ell^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1}(-\ell^2\sin^2\theta)+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{1.\ 2}(-\ell^2\sin^2\theta)^2$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{1.\ 2.\ 3}(-\ell^2\sin^2\theta)^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdots\cdots\{\frac{1}{2}-(n-1)\}}{1.\ 2.\ 3\ \cdots\cdots n}(-\ell^2\sin^2\theta)^n$$
$$+\cdots\cdots\ =1-\frac{1}{2}\ell^2\sin^2\theta-\frac{1}{2,\ 4}\ell^4\sin^4\theta\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots-\frac{1,\ 3\cdots\cdots(2n-3)}{2,\ \ 4}\ell^{2n}\sin^{2n}\theta-\cdots\cdots$$

公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}d\theta=\frac{1,\ 3,\ 5,\ (2n-1)}{2,\ 4,\ 6\ \cdots 2\ n}\ \frac{\pi}{2}$ を利用して上式を項別に積分することによって、

$$\text{全周}\ S=2\pi r\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\ell^2-\left(\frac{1,3}{2,4}\right)^2\frac{\ell^4}{3}-\cdots\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\cdots\left(\frac{1,\ 3\cdots\cdots(2n-1)}{2,\ 4\cdots\cdots 2\ n}\right)\frac{\ell^{2n}}{2n-1}-\cdots\cdots\right\}$$

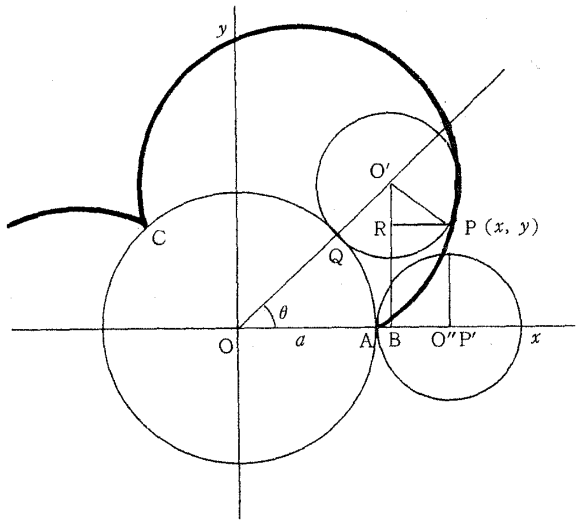
従って離心率 ℓ が小さいときは楕円の全長

$S\fallingdotseq 2\pi a\left(1-\frac{\ell^2}{4}\right)$

としてQ点の軌跡の曲線の数を数えることが出来る。

(3) 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の外周上を、半径 r なる円が滑らないで、回転するとき周上の定点Qの軌跡について、Q点の座標。

§ 2 . Epicycloid



〔図 2〕 Epicycloid － 1

半径 a なるO円に、半径 r なるO′円が、外接し滑ることなしに回転するとき、その円周上の定点Pの座標を(x , y)とすれば、

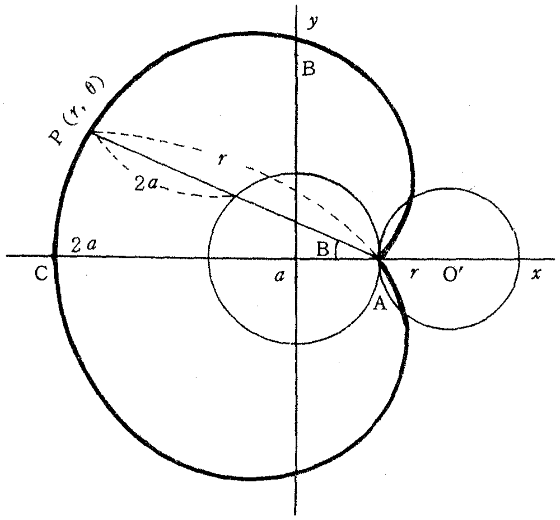
(a)

$$x = OP' = OB + RP = OO'\cos\theta + O'P \cos\angle PO'R = (a+r)\cos\theta - r\cos\frac{a+r}{r}\theta$$

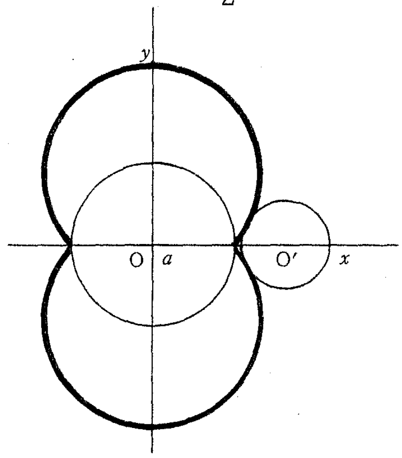
$$y = PP' = RB = O'B - O'R = OO'\sin\theta - O'P\cos\angle PO'R = (a+r)\sin\theta - r\sin\frac{a+r}{r}\theta$$

(b) a と r の大きさにより、図3の図形を生ずる。

$r = a$ のときの曲線をCardioid 線という。



$$r = \frac{a}{2}$$



〔図 3〕 Epicycloid － Ⅱ

極座標 $r = a(1 + \cos\theta)$

$$x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta)$$

$$y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta)$$

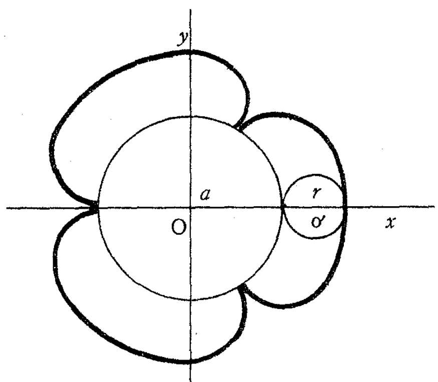
$$x = \frac{a}{2}(3\cos\theta - \cos 3\theta)$$

$$y = \frac{a}{2}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$$

$$r = \frac{a}{3}$$

$$x = \frac{a}{3}(4\cos\theta + \cos 4\theta)$$

$$y = \frac{a}{3}(4\sin\theta + \sin 4\theta)$$



〔図 4〕 Epicycloid－ 2 Ⅲ

Cardioid の全長を求むる。

$r = a(1 + \cos\theta)$ より

$dr = -a\sin\theta\, d\theta$

回転する円周上の点によって描かれた曲線の種々な特性について解析的研究

三　川　　時　郎

Analytical study various Peculiarities of curves which are drawn by point of the rolling circle

by Jiro Mikawa.

1，まえがき

われわれの周囲には、直線・円を始め野球のボール、ロケットの飛ぶ跡等各種の曲線が見られる。それ等を数学的に追跡する方法として次の Analytic methodが考えられる。

(1)　関数　$y=f(x)$のグラフ

(2)　$f(x,\ y)=0$ をみたす点の軌跡。

(3)　polay Co-ordinates $(r,\ \theta)$ について、$f(r,\ \theta)=0$ をみたす点の軌跡。

(4)　Parameter(t)を使って $x=f(t)$, $y=g(t)$を表わす。

区間 $[t,\ t_2]$ で $f'(t)$, $g'(t)$が連続ならば、曲線の弧の長さは

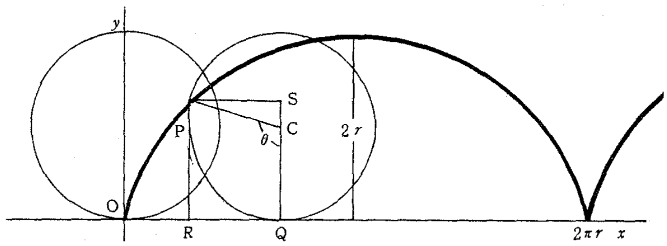
$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{f'^2(t)+g^2(t)}\,dt$$

二次曲線として、線について、その特性を述べる。

1. Cycloid
2. Epicycloid
3. Ellipse の curve

§1．Cycloid

半径 r なる円Cが一定直線上をすべらないで回転するとき、回転円の周上の定点Pがえがく曲線は、Parameter (θ)を用いる。



〔図1〕 Cycloid

最初定点Pが、原点Oより出発した θ だけ回転したときのP点の座標を $(x,\ y)$ とする。

$$x=RO=QO-QR,$$

$$QO=PQ=r\theta,\quad QR=r\sin\theta$$

$$\therefore x=r\theta-r\sin\theta=r(\theta-\sin\theta)$$

$$y=PR=QS=r+r\cos(\pi-\theta)$$

$$=r-r\cos\theta$$

$$=r(1-\cos\theta)$$

又P点が、原点Oより $(0<\theta\leqq 2\pi)$ までの弧の長さをSとすると、

$$S=\int_0^{\theta}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$d\theta=4r\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

故に1周期の部分の長さは、$8r$ である。

このP点のえがく線をCycloid と云ふ。