これは同じ数p-1がn個並んだ数を表わす。

おわりに

以上の考察から次のようなことがいえる。

記数法の選び方によって，見かけの上では，いろいろともとのものとは異った様相を呈することがあるが，その本質的な性質は保存されていることが多い。

$\frac{1}{13} = 1 \div 13$

	0.	0	7	6	9	2	3
13)	1	10	100	90	120	30	40
余り …	①	10	9	12	3	4	①

これらの定理をp-進数の世界でみると，つぎのようになる。

$(b, p) = 1$なる既約真分数$\frac{a}{b}$をp-進小数化すると純循環小数となる。その周期λは

$$p^{\lambda} \equiv 1 \pmod{b}$$

を満足する最小正数である。

特にbが素数で$\lambda = 2n$のとき，その循環節を切半して加えるとp−1がnこ並んだ数が得られる。

証明はあとまわしにして例をいくつかあげてみよう。

$\frac{1}{7} = 0.\dot{0}1021\dot{2}_{(3)}$

$$\begin{array}{r} 010 \\ 212 \\ \hline 222 \end{array}$$

	0.	0	1	0	2	1	2
7)	1	3	9	6	18	12	15
	①	3	2	6	4	5	①

$\frac{1}{7} = 0.\dot{0}3241\dot{2}_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 032 \\ 412 \\ \hline 444 \end{array}$$

	0.	0	3	2	4	1	2
7)	1	5	25	20	30	10	15
	①	5	4	6	2	3	①

$\frac{1}{11} = 0.\dot{0}00101110\dot{1}_{(2)}$

	0.	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
11)	1	2	4	8	16	10	20	18	14	6	12
	①	2	4	8	5	10	9	7	3	6	①

$$\begin{array}{r} 00010 \\ 11101 \\ \hline 11111 \end{array}$$

$\frac{1}{11} = 0.\dot{0}31345242\dot{1}_{(6)}$

	0.	0	3	1	3	4	5	2	4	2	1
11)	1	6	36	18	42	54	60	30	40	24	12
	①	6	3	7	9	10	5	8	4	2	①

$$\begin{array}{r} 03134 \\ 52421 \\ \hline 55555 \end{array}$$

次にbが素数で$\lambda = 2n$の場合だけ証明することにする。

証明

$$\frac{a}{b} = 0.\dot{C}_1 C_2 \cdots\cdots \dot{C}_{2n},$$

$$A = C_1 \cdots C_n, \quad B = C_{n+1} \cdots C_{2n}$$

とおくと，循環小数の求め方から次の関係式が得られる。

$$ap^{2n} = b \times C_1 C_2 \cdots C_{2n} + a$$

$$a(p^{2n} - 1) = b \times C_1 C_2 \cdots C_{2n} = b(Ap^n + B) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$(b, a) = 1$から $b | p^{2n} - 1$

$p^{2n} \equiv 1 \pmod{b}$　$2n$は$p^{\lambda} \equiv 1 \pmod{b}$を満足する$\lambda$の最小正数

又$b | p^{2n} - 1$，$b | (p^n - 1)(p^n + 1)$において，$2n$の最小性から

$$b | p^{n-1} \quad \therefore \ b | p^n + 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①から $\frac{a(p^{2n} - 1)}{b} = Ap^n + B$

$$\frac{a(p^n + 1)}{b} = \frac{Ap^n + B}{p^n - 1} = A + \frac{A + B}{p^n - 1} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

②から，③の左辺は正整数，$\therefore \frac{A+B}{p^n - 1}$も亦正数

$$A = C_1 \cdots C_n = C_1 p^{n-1} + C_2 p^{n-2} + \cdots + C_n < p^n$$

より

$A \leqq p^n - 1$，　同様に $B \leqq p^n - 1$

共に＝が成り立つときは循環節がすべて同じ数字p−1になってしまって，周期が2nであるという仮定に矛盾する。

$$\therefore \ A + B < 2(p^n - 1)$$

$$\therefore \ \frac{A + B}{p^n - 1} < 2$$

$$\therefore \ \frac{A + B}{p^n - 1} = 1 \quad \text{即ち} \quad A + B = p^n - 1$$

$$AA = A\times(p^n+1),\quad n\text{が奇数だから}$$
$$= A\times(p+1)(p^{n-1}-p^{n-2}+\cdots-p+1)$$
$$= A\times 11_{(p)}\times(1010\cdots01-1010\cdots10)_{(p)}$$

即ち $11_{(p)}$ の倍数である。

つぎに例3の問題を同様にp-進法の世界で考えてみると，次のように述べられよう。

2^n 桁のp-進数を3回並べて表わされる数は $111_{(p)}$ 及び $(p\text{-}1)1_{(p)}$ の倍数である。こゝに $111_{(p)}$, $(p\text{-}1)1_{(p)}$ は10進数の111, 91に対応する数である。

次にこれを数学的帰納法によって証明しよう。

証明

$n=1$ のとき，2桁のp-進数をAとせくと

$$AAA = A\times(p^4+p^2+1)$$
$$= A\times(p^2+p+1)(p^2-p+1)$$
$$= A\times 111_{(p)}\times(101-10)_{(p)}$$
$$= A\times 111_{(p)}\times(p-1)1_{(p)}$$

例えば

$$\begin{array}{r} 3\,0\,4\,4 \\ 111_{(5)}\overline{)\,3\,4\,3\,4\,3\,4_{(5)}} \\ 3\,3\,3 \\ \hline 1\,0\,4\,3 \\ 4\,4\,4 \\ \hline 4\,4\,4 \\ 4\,4\,4 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,4 \\ 41_{(5)}\overline{)\,3\,0\,4\,4_{(5)}} \\ 2\,2\,3 \\ \hline 3\,1\,4 \\ 3\,1\,4 \\ \hline 0 \end{array}$$

2^{n-1} 桁のとき成り立つとすると 2^n 桁のときとをいえつことをいえばよい。

2^{n-1} 桁のp-進数をAとおくと，仮定により

$$AAA = A\times(p^{2^n}+p^{2^{n-1}}+1)$$
$$= A\times(p^2+p+1)(p^2-p+1)$$
$$(p^4-p^2+1)\cdots(p^{2^{n-1}}-p^{2^{n-2}}+1)$$
$$= A\times 111_{(p)}\times(101-10)_{(p)}\times\cdots$$

2^n 桁のp-進数をBとおくと

$$BBB = B\times(p^{2^{n+1}}+p^{2^n}+1)$$
$$= B\times(p^{2^n}+p^{2^{n-1}}+1)(p^{2^n}-p^{2^{n-1}}+1)$$

仮定により

$$= B\times(p^2+p+1)(p^2-p+1)(p^4-p^2+1)$$
$$\cdots(p^{2^n}-p^{2^{n-1}}+1)$$
$$= B\times 111_{(p)}\times(101-10)_{(p)}\times\cdots$$

$(101-10)_{(p)}=(p-1)1_{(p)}$ であるから

定理はこゝに証明された。

$p=10$ の場合，即ち10進数の場合はこの特殊の場合として含まれる。

$111_{(p)}$, $(-1)1_{(p)}$ が10進法の世界ではどんな数を表わすかをみておこう。

p	p^2+p+1 $111_{(p)}$	p^2-p+1 $(p-1)1_{(p)}$
2	7	3
3	13	7
4	21=3×7	13
5	31	21=3×7
6	43	31
7	57=3×19	43
8	73	57=3×19
9	91=7×13	73
10	111=3×37	91=7×13

§3. 既約真分数の小数化と記数法

10進数の世界では次のようなことが分っている。

$(b, 10)=1$ なる既約真分数 $\frac{a}{b}$ を小数化すると純循環小数になる。その周期 λ は

$$10^\lambda \equiv 1 \pmod{b}$$

を満足する最小正数である。

特にbが素数で $\lambda=2n$ のとき，その循環節を切半して加えると，9がnこ並んだ数が得られる。(Toeplit z-Rademacher の定理)

例 $\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$ $\qquad \begin{array}{r} 1\,4\,2 \\ +\,8\,5\,7 \\ \hline 9\,9\,9 \end{array}$

$\frac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}$ $\qquad \begin{array}{r} 0\,7\,6 \\ +\,9\,2\,3 \\ \hline 9\,9\,9 \end{array}$

$$\frac{1}{7}=1\div 7 \qquad \begin{array}{rrrrrrrr} & 0. & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 \\ \hline 7\,) & 1 & 10 & 30 & 20 & 60 & 40 & 50 \\ \text{余り}\cdots & ① & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & ① \end{array}$$

$352_{(6)}=2\times154_{(6)}$

$504_{(6)}=2^2\times114_{(6)}$

$4130_{(6)}=3^3\times54_{(6)}$

$$\begin{array}{r} 154 \\ 2\,)\overline{352} \\ 2 \\ \hline 15 \\ 14 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 114 \\ 4\,)\overline{504} \\ 4 \\ \hline 10 \\ 4 \\ \hline 24 \\ 24 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,)\underline{4130} \\ 3\,)\underline{1230} \\ 3\,)\underline{\ \ 250} \\ 54 \end{array}$$

例１の(２)については，10進数の９に対してp-進数のp-1を考えれば，次のように述べることができよう。

p-進数aにおいて，各位の数字の和が，p-1の倍数ならば，aも亦p-1の倍数である。

たとえば，5-進法の世界で考えると

$34221_{(5)}$の各位の数字の和は４の倍数である。そして$34221_{(5)}$は４でわりきれる。

$$\begin{array}{r} 4414 \\ 4\,)\overline{34221} \\ 31 \\ \hline 32 \\ 31 \\ \hline 12 \\ 4 \\ \hline 31 \\ 31 \\ \hline 0 \end{array}$$

5-進法の乗法九々

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

証明

p-進法n桁の数aはつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} a &= a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots a_1, a_{0\,(p)} \\ &= a_{n-1}p^{n-1}+a_{n-2}p^{n-2}+\cdots+a_1p+a_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_ip^i \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a_i \equiv a_i & i=0,1,\cdots,n-1 \\ p \equiv 1 & \\ p^i \equiv 1 & i=0,1,\cdots,n-1 \end{array}\right\} (\mathrm{mod}\ p-1)$$

$$a_ip^i \equiv a_i$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{n-1} a_ip^i \equiv \sum_{i=1}^{n-1} a_i \quad (\mathrm{mod}\ p-1)$$

$$\text{即ち} \quad a \equiv \sum_{i=0}^{n-1} a_i \quad (\mathrm{mod}\ p-1)$$

例１の(３)については(２)と同様に次のように述べることができる。

$a=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_{0\,(p)}$ で表わされるp-進数aにおいて，右から奇数番目の数字の和と偶数番目の数字の和との差が$11_{(p)}$の倍数ならばaも亦$11_{(p)}$の倍数である。

例えば

$34221_{(5)}$では$(1+2+3)-(2+4)=0\cdots11_{(5)}$の倍数

$43523_{(6)}$では$(3+5+4)-(2+3)=11_{(6)}$

割り算の結果は

$$\begin{array}{r} 3111\phantom{_{(5)}} \\ 11_{(5)}\,)\overline{34221_{(5)}} \\ 33\phantom{000_{(5)}} \\ \hline 12\phantom{00_{(5)}} \\ 11\phantom{00_{(5)}} \\ \hline 12\phantom{0_{(5)}} \\ 11\phantom{0_{(5)}} \\ \hline 11\phantom{_{(5)}} \\ 11\phantom{_{(5)}} \\ \hline 0\phantom{_{(5)}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3553\phantom{_{(6)}} \\ 11_{(6)}\,)\overline{43523_{(6)}} \\ 33\phantom{000_{(6)}} \\ \hline 105\phantom{00_{(6)}} \\ 55\phantom{00_{(6)}} \\ \hline 102\phantom{0_{(6)}} \\ 55\phantom{0_{(6)}} \\ \hline 33\phantom{_{(6)}} \\ 33\phantom{_{(6)}} \\ \hline 0\phantom{_{(6)}} \end{array}$$

証明

$$\left.\begin{array}{l} a_i \equiv a_i \quad i=0,1,\cdots,n-1 \\ p \equiv -1 \\ p^{2i} \equiv 1 \\ p^{2i-1} \equiv -1 \\ a_{2i}p^{2i} \equiv a_{2i} \\ a_{2i-1}p^{2i-1} \equiv -a_{2i-1} \end{array}\right\} (\mathrm{mod}\ p+1)$$

$$\begin{aligned} a = \sum_{i=1}^{n-1} a_ip^i \equiv \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_i &= (a_6+a_2+a_4+\cdots) \\ &\quad -(a_1+a_3+a_5+\cdots) \\ &\quad (\mathrm{mod}\ p+1) \end{aligned}$$

次に例２の問題をp-進数において考えよう。

nを奇数とするとき，n桁の数をAとおくと

ろう。

このことは次の奇数5の5桁の数についても成り立つだろうか。

5桁の数をAとおくと

$AA = A \times 100001 = A \times (11 \times 9091)$

9091は素数であることから，7，13の倍数ではないことが示された。但し11の倍数であることは，奇数桁の数を2回並べて表わされる数について常に成り立つことである。このことは例1の(3)からも明らかであるが，つぎのように証明することもできる。

n桁の数をAとおくと

$AA = A \times (10^n + 1)$ こゝにnは奇数だから

$= A \times (10+1) \times (10^{n-1} - 10^{n-2} \cdots - 10 + 1)$

$= A \times 11 \times (9090 \cdots\cdots 9091)$

例 3

つぎに232323のように2桁の数を3回並べて表わされる数について考えてみよう。

$232323 = 23 \times 10101 = 23 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37)$

$= 23 \times (111 \times 7 \times 13)$

この数も亦，7と13の倍数であることは例2の場合と同じであり，ちがう点は111の倍数でもあるところである。

このことが任意の2桁の数について成り立つことは明らかなので，更に他の偶数個の場合についてしらべてみよう。

4桁の数をAとおくと

$AAA = A \times (10^8 + 10^4 + 1)$

$= A \times (10^2 + 10 + 1) \times (10^2 - 10 + 1)$

$\times (10^4 - 10^2 + 1)$

$= A \times 111 \times 91 \times 9901$

$= A \times 111 \times 7 \times 13 \times 9901$

やはり，7, 13, 111の倍数である。

つぎに6桁の数をAとおくと

$AAA = A \times (10^{12} + 10^6 + 1)$

$= A \times (10^6 + 10^3 + 1) \times (10^6 - 10^3 + 1)$

$= A \times 1001001 \times 999001$

こゝにできた2つの数はいづれも，7，13，111のいづれの倍数でもない。

更に8桁の数をAとおくと

$AAA = A \times (10^{16} + 10^8 + 1)$

$= A \times (10^2 + 10 + 1)(10^2 - 10 + 1)$

$\times (10^4 - 10^2 + 1)(10^8 - 10^4 + 1)$

$= A \times 111 \times 91 \times 9901 \times 99990001$

$91 = 7 \times 13$だから

この数は111，7，13の倍数である。

以上の考察から，例3の問題は次のように一般化することができる。

桁数が2^nの数を2回並べて表わされる数は111，7，13の倍数である。

この証明は，更に一般的なp-進数の場合の定理の証明の際に，その特殊の場合として取りあげよう。

§2．前章の問題をp-進数の世界で考察してみよう。

例1の(1)の問題は次のように一般化することができる。

p-進数aにおいてpが約数d($\neq 1$)をもつとき，

下1桁がdの倍数ならば，aも亦dの倍数である。

下2桁がd^2の倍数ならば，aも亦d^2の倍数である。

下3桁がd^3の倍数ならば，aも亦d^3の倍数である。

証明は容易だから省いて，例だけあげておく。

p=6の場合，

6-進法における乗法九々

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	10	12	14
3	3	10	13	20	23
4	4	12	20	24	32
5	5	14	23	32	41

記数法に関連した数の性質について

三　浦　午　次　郎

On some characters of numbers in the scale of notations.

by Umajiro Miura

Resumè

Some characters of numbers show different aspects depending on the scale of notations. But my considering on the following themes,

I. the divisors and multiples in the decimal system.

II. the same as above in the p-adic system.

III. the decimalization of fractional numbers and at which looking again in the p-adic system.

the essential characters of them are almost preserved.

はじめに

多くの自然数及び有理数の各にはそれぞれ名前と表記がある。この名前と表記の間には一般に密接な関係があるのが普通であるが，数学では一つの名前をもつ数をいろいろと異った記号で表わすことがある。そして数の性質のなかには，その表記の形式によって見かけが大きく変わるものがある。このような問題のうち，約数，倍数に関係するものを取りあげてみよう。

§ 1．10進記数法における約数・倍数のある性質について

10進記数法の世界においては下に示すようにいくつかの数についての倍数の見分け方が知られている。

例 1

（1）
- 下 1 桁が 2（5）の倍数ならば，その数も亦 2（5）の倍数である。
- 下 2 桁が 4（25）の倍数ならば，その数も亦 4（25）の倍数である。
- 下 3 桁が8(125)の倍数ならば，その数も亦8(125)の倍数である。

（2）各位の数字の和が 9（3）の倍数ならば，その数も亦 9（3）の倍数である。

（3）右からみて奇数番目の数字の和と偶数番目の数字の和との差が11の倍数ならば，その数も亦11の倍数である。

不思議なことに，小さい素数の 7 や13についてのものは殆んど分ってないようである。こゝでは，7 や13についてのものを調べたり，更に一般的な位取り記数法の世界では上記の例 1 で述べたことがどのようになるかということについて考察してみたい。このようなことは実用的には殆んど無意味であろうが，用をはなれて無用の世界に遊ぶような意味でこれを考えてみたい。

例 2

たとえば，365365のように 3 桁の数を 2 回並べて表わされる数について考える。

$$365365=365\times1001=365\times(7\times11\times13)$$

から明らかのように，7, 11, 13 の倍数である。

こゝに，7, 13の倍数であることがおもしろい。このことが一般的に成り立つことも明らかであ